

# 稳健性拓扑优化中载荷方向扰动对规避无支撑结构的影响

喻圣林, 李鹏, 范百佳, 王慎彪, 赵渊

(华东交通大学机电与车辆工程学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 针对确定对称载荷条件下拓扑优化获得的无支撑结构不能满足实际工程需求的问题, 将载荷方向的不确定性纳入结构的优化设计中, 分析其对规避无支撑结构的影响。使用区间变量表征载荷方向上的不确定性, 利用泰勒公式求解最敏感加载条件下的灵敏度, 使用 SIMP 模型以及 MMA 算法对连续体结构进行稳健性设计。优化结果表明, 考虑载荷方向不确定性的结构优化可有效规避无支撑结构; 不确定对称载荷条件下, 结构柔度随扰动范围增大而呈上升趋势, 结构呈对称性; 不确定非对称载荷条件下, 非对称载荷对结构柔度影响显著, 结构非对称特性随扰动范围差异的增加趋于明显。

**关键词:** 无支撑结构; 不确定载荷方向; 稳健性设计

中图分类号: TH122

文献标志码: A

## Effect of load direction disturbance on avoiding unsupported structures in robust topology optimization

Yu Shenglin, Li Peng, Fan Baijia, Wang Shenbiao, Zhao Yuan

(School of Mechatronics & Vehicle Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** The unsupported structure obtained by topology optimization under the condition of deterministic symmetric load can not meet the actual engineering requirements. The uncertainty of load direction was incorporated into the structural optimization design. And its influence on the avoidance of unsupported structure was analyzed. This paper uses interval variables to represent the uncertainty of the load direction, uses Taylor formula to solve the sensitivity under the most sensitive loading condition, and uses SIMP model and MMA algorithm to design the robustness of continuum structure. The optimization results show that the structural optimization considering the uncertainty of load direction can effectively avoid unsupported structures. Under uncertain symmetric loading conditions, the structural compliance shows an upward trend with the increase of the disturbance range. And the structure shows symmetry. Under uncertain asymmetric loading conditions, the influence of asymmetric loading on structural compliance is significant, and the structural asymmetry characteristics tend to be more obvious with the increase in the variability of disturbance ranges.

**Key words:** Unsupported structure; Uncertainty of load direction; Robust design

传统的结构拓扑优化通常基于确定的载荷条件, 在给定的设计区域内, 寻找最优的材料分布, 以满足设计需求<sup>[1-5]</sup>。当该拓扑优化方法遇到对称载荷的结构优化问题时, 由于在确定对称载荷条件下, 得到的拓扑结构材料聚集于对称载荷附近, 导致约束端无材料分布, 形成了一种只存在于理论条件下的无支撑结构<sup>[6-7]</sup>。如实际工程中的高压铁塔支架, 该支架是固定高压线长距离输电的重要设施, 支架受到电线两端的对

收稿日期: 2025-07-28

基金项目: 国家自然科学基金项目 (52165016)

称载荷作用，若采用确定载荷拓扑优化方法将获得无支撑结构，即该结构与铁塔主体无材料连接，这与实际工程结构存在明显差异，显然无支撑结构在实际工程中是难以实施的<sup>[7]</sup>。因此，将载荷方向不确定<sup>[8-9]</sup>纳入结构设计中，研究不确定对称载荷不同的扰动范围对规避无支撑结构的影响，并通过改变载荷的扰动范围，使得上下载荷扰动范围实现非对称分布，进一步探究不确定非对称载荷的扰动范围对规避无支撑结构的效果，具有重要的实际应用价值。

近年来，稳健性拓扑优化(robust topology optimization, RTO)成为不确定载荷条件下的拓扑优化的主要研究方向之一<sup>[10-11]</sup>，RTO 方法是在不确定参数所有可能的变化范围之内确保优化结果的低敏感性和强鲁棒性，目前已有大量学者在该领域开展了相关工作。Wang 等<sup>[12]</sup>在多个独立外载荷位置条件下，进一步的研究了载荷位置不确定的连续结构拓扑优化问题，使用连续有界的区间变量对载荷位置进行描述，验证了所提出方法的有效性。Guo 等<sup>[13]</sup>采用水平集方法对边界变化不确定性问题进行研究，选择结构最坏情况下的柔度和基频为目标函数，以保证优化设计对边界变化的不敏感性。Kang 等<sup>[14]</sup>利用扩展最优线性估计法和混沌多项式展开法对多相材料梯度界面的不确定性进行量化和响应预测，研究多相材料结构不确定梯度界面的稳健性拓扑优化方法。Zheng 等<sup>[15]</sup>针对随机混合不确定条件下周期动态微结构并行优化问题，提出了一种基于二元降维方案的混合降维方法来评估目标函数区间均值和方差，设计了一种基于水平集方法的稳健性拓扑优化方法。Peng 等<sup>[16]</sup>采用摄动法和变密度法等，基于泰勒展开公式对载荷的不确定性进行表征，提出了一种在载荷大小和方向不确定条件下的稳健性拓扑优化方法。王尚<sup>[4]</sup>等提出了一种新的不确定性优化算法，探究载荷大小与方向不确定对规避无支撑结构的影响。综上，现有研究主要聚焦于不确定载荷优化及其对无支撑结构的规避问题，忽视了扰动范围对规避无支撑结构的影响。

研究基于变密度法<sup>[6]</sup>，使用区间变量表征载荷方向上的不确定性，在载荷方向区间内选择对柔度影响最大的加载方向作为最敏感加载条件，通过泰勒公式计算最敏感加载条件下的最小化柔度和灵敏度，使用 SIMP 模型以及 MMA 算法对连续体结构进行稳健性设计，研究不确定对称和不确定非对称载荷条件下，载荷方向扰动范围对无支撑结构规避效果的影响。

## 1 拓扑优化模型及方法

### 1.1 拓扑优化模型

在实际工程环境中，载荷的施加方向往往存在扰动范围，设定载荷的确定方向为名义载荷方向，即理想载荷的施加方向。实际载荷方向围绕着名义载荷方向存在扰动，使用区间变量，即数组 $(\alpha_0, \alpha_\alpha, \alpha_\beta)$ 来表征载荷方向有界的扰动<sup>[17]</sup>，其中 $\alpha_0$ 为名义载荷方向， $\alpha_\alpha$ 和 $\alpha_\beta$ 分别为名义载荷方向上的最大顺逆扰动。

研究以单元密度为设计变量，最敏感加载条件下柔度最小化为目标，体积百分比为约束条件，其拓扑列式<sup>[17]</sup>为

$$\begin{aligned} & \text{find } \boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \cdots \ \rho_n]^T \\ & \min C_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \mathbf{U} = \sum_{e=1}^n \rho_e^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ & \text{s.t.} = \begin{cases} \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{K} \mathbf{U} \\ V \leq f V_0 \\ \alpha_0 + \alpha_\alpha \leq \alpha \leq \alpha_0 + \alpha_\beta \\ 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \quad (e=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

式中： $\boldsymbol{\rho}$ 为单元密度向量， $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ 为各个单元密度， $C_\alpha$ 为最敏感加载条件下结构的柔度值， $\mathbf{F}_\alpha$ 为最敏感载荷矢量， $\mathbf{U}$ 为总体位移列阵， $\rho_e$ 为 $e$ 单元密度， $p$ 为惩罚因子， $\mathbf{u}_e$ 为结构中 $e$ 单元的节点位移矢量， $\mathbf{k}_e$ 为结构中 $e$ 单元的单元刚度矩阵， $\mathbf{K}$ 为总体刚度矩阵， $V$ 为结构的体积， $V_0$ 为设计域体积， $f$ 为体

积约束百分比,  $\alpha_a$  为名义载荷方向上顺时针的最大扰动,  $\alpha_b$  为名义载荷方向上逆时针的最大扰动, 为了避免刚度矩阵奇异, 取  $\rho_{\min} = 0.00001$ 。

## 1.2 SIMP 插值模型

由于材料选择为各向同性材料, 所以使用 SIMP 插值模型对材料参数进行惩罚<sup>[17]</sup>:

$$E(\rho_e) = \rho_e^p E_0 \quad (2)$$

式中:  $E(\rho_e)$  为惩罚后弹性模量;  $E_0$  为实体材料的弹性模量;  $p$  为惩罚因子, 取值为 3。

## 2 求解目标函数及灵敏度分析

### 2.1 求解目标函数

在求解不确定载荷方向条件下结构的柔度时, 首先需要了解载荷方向的变化对柔度的影响情况, 根据有限元法, 当结构受到外载荷作用时, 结构的平衡方程为<sup>[17]</sup>:

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3)$$

其中,

$$\mathbf{F}_\alpha = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad F \sin \alpha \quad F \cos \alpha \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T \quad (4)$$

以名义载荷方向  $\alpha_0$  为  $270^\circ$ , 最大顺逆扰动  $\alpha_a$  和  $\alpha_b$  均为  $5^\circ$  为例, 载荷方向围绕名义载荷方向存在顺逆  $5^\circ$  的扰动, 则载荷方向的施加范围为  $[265^\circ, 275^\circ]$ 。

当载荷的方向发生变化时, 总体位移列阵  $\mathbf{U}$  与结构柔度也会随之发生变化, 利用泰勒公式<sup>[18]</sup>在载荷方向变化较小的情况下, 计算出结构的近似柔度值大小, 泰勒展开近似计算柔度的数学公式如下<sup>[19]</sup>:

$$C_\alpha \approx C_0 + \frac{\partial C_0}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha^2} \Delta \alpha^2 \quad (5)$$

式中:  $\Delta \alpha$  为任意载荷角度与名义载荷方向的差值; 右侧第一项为名义载荷方向下的柔度<sup>[17]</sup>:

$$C_0 = \mathbf{F}_0^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (6)$$

式中:  $C_0$  为名义载荷方向下的柔度;  $\mathbf{F}_0$  为名义载荷矢量。

公式 (5) 右侧第二项的常数项部分为名义载荷方向下柔度对载荷方向的一阶导数<sup>[17]</sup>:

$$\frac{\partial C_0}{\partial \alpha} = 2\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha} \quad (7)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad F \cos \alpha \quad -F \sin \alpha \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T \quad (8)$$

式中:  $\partial \mathbf{F}_\alpha / \partial \alpha$  为载荷矢量对载荷方向的一阶导数。

公式 (5) 右侧第三项的常数项部分为名义载荷方向下柔度对载荷方向的二阶导数<sup>[17]</sup>:

$$\frac{\partial^2 C_0}{\partial \alpha^2} = 2 \frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha} + 2\mathbf{U}^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha^2} \quad (9)$$

其中,

$$\frac{\partial \mathbf{U}^T}{\partial \alpha} = \mathbf{K}^{-T} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha^T}{\partial \alpha} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha^2} = [0 \ 0 \ \dots \ -F \sin \alpha \ -F \cos \alpha \ \dots \ 0 \ 0]^T \quad (11)$$

式中： $\partial \mathbf{U}^T / \partial \alpha$  为位移矢量对载荷方向的一阶导数； $\partial^2 \mathbf{F}_\alpha / \partial \alpha^2$  载荷矢量对载荷方向二阶导数。

由于三角函数的求导特性，公式（11）中载荷矢量对载荷方向二阶导数可表示为<sup>[17]</sup>：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha^2} = -\mathbf{F}_\alpha \quad (12)$$

## 2.2 灵敏度分析

根据泰勒展开公式，可以近似计算在小范围扰动下的任意载荷角度的柔度值，再对单元密度进行求导，可得到柔度对单元密度的灵敏度<sup>[19]</sup>：

$$\frac{\partial C_\alpha}{\partial \rho_e} \approx \frac{\partial C_0}{\partial \rho_e} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha^2} \Delta \alpha^2 \quad (13)$$

式中：右侧第一项表示在名义载荷方向下柔度对于单元密度的导数<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial C_0}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (14)$$

公式（13）右侧的第二项为名义载荷方向下柔度对载荷角度的灵敏度再对单元密度求导，由公式（7）等号左右两侧对单元密度求导可得<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial^2 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha} = -2p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \alpha} \quad (15)$$

公式（13）右侧第三项为名义载荷方向下柔度对载荷角度的二阶导再对单元密度求导，由公式（8）等号左右两侧对单元密度求导可得<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial^3 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha^2} = -2p \rho_e^{p-1} \frac{\partial \mathbf{u}_e^T}{\partial \alpha} \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \alpha} - 2p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial \alpha^2} \quad (16)$$

式中：矢量对于载荷方向二阶导数可表示为<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \alpha^2} = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha^2} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}_\alpha}{\partial \alpha} \quad (17)$$

根据公式（13）可求得载荷方向发生变化时，柔度对于单元密度的灵敏度。

为了提高结构抵抗载荷变化的能力，选取最敏感加载条件下的灵敏度对单元密度进行更新。可能的最敏感加载条件有三个，其中两个为载荷方向的上下边界，另一个通过求解扰动范围内下式的极值点获取<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial^2 C_\alpha}{\partial \rho_e \partial \alpha} = \frac{\partial^2 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha} + \frac{\partial^3 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha^2} \Delta \alpha_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha^3} \Delta \alpha_m^2 = 0 \quad (18)$$

式中： $\Delta \alpha_m$  为敏感载荷方向与名义载荷方向角度差值，二次项系数为<sup>[20]</sup>：

$$\frac{\partial^4 C_0}{\partial \rho_e \partial \alpha^3} = 8p \rho_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \alpha} \quad (19)$$

对于寻找最小化柔度问题，灵敏度取值为负，选取上述可能的最敏感条件中绝对值最大的灵敏度，代入 MMA 算法中用于更新设计变量。

## 2.3 算法流程

为探究不确定载荷方向条件下无支撑结构的规避问题，得到具有实际工程价值的拓扑结构，具体步骤

如下：① 设定初始条件（材料参数、载荷条件等），定义设计域；② 计算单元刚度矩阵；③ 组装总体刚度矩阵；④ 构建载荷方向不确定优化模型；⑤ 根据不同的扰动范围，计算敏感加载条件；⑥ 计算目标函数和灵敏度；⑦ 判断是否满足收敛条件，是则输出优化结果，否则返回第三步重新优化，直到满足收敛条件。

### 3 数值算例

#### 3.1 无支撑结构

导致产生无支撑结构的原因在于确定对称载荷条件下材料将最终被优化集中于载荷施加点附近，而与约束位置无材料连接，使得所得到的优化结构在难以用于实际工程中。研究以经典确定对称载荷悬臂梁结构为优化算例，探究不确定对称和不确定非对称载荷条件下，载荷扰动范围对无支撑结构规避效果的影响。

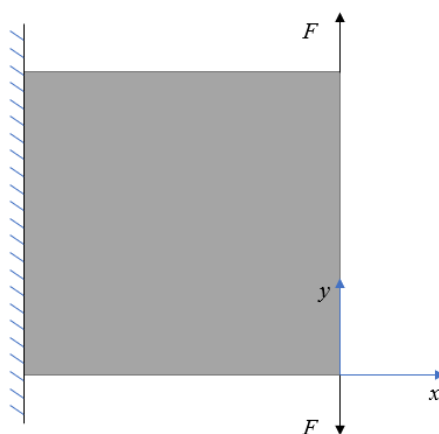


图 1 设计域及边界条件

Fig.1 Design domain and boundary conditions

在载荷方向不存在扰动的情况下，设定有限元网格数量为  $200 \times 200$ ，设计域左边区域完全固定，设计域的右上方和右下方分别受到竖直向上和竖直向下的外力载荷，载荷大小均为 1 N，材料的弹性模量 1 GPa，泊松比为 0.3，惩罚半径为 3，惩罚因子为 3，使用 SIMP 模型以及 MMA 算法对连续体结构进行稳健性设计。图 1 为设计域及边界条件，图 2 为不同体积分数  $f$  下的拓扑构型及柔度值  $C$  的大小。



(a)  $f = 0.2, C = 28.6987$



(b)  $f = 0.3, C = 26.5576$



(c)  $f=0.4, C=25.5831$



(d)  $f=0.6, C=24.7436$

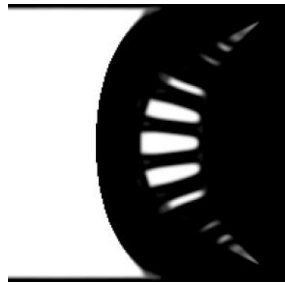
图 2 不同体积分数下的拓扑构型

Fig.2 Topological configurations under different volume fractions

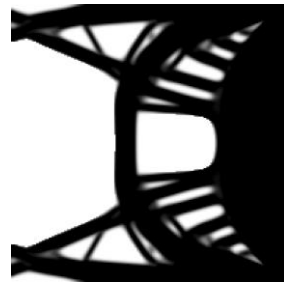
通过图 2 可知，在确定载荷条件下，施加对称载荷的悬臂梁结构仅在两端载荷点附近存在类似于米歇尔梁的材料分布，而与设计域左边的固定约束端并无材料与之相连接，所得到的优化结构在难以用于实际工程中。

### 3.2 不确定对称载荷的规避无支撑结构

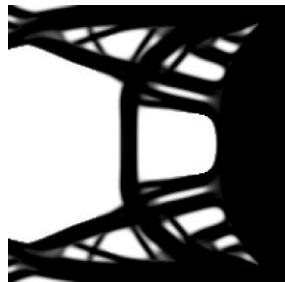
载荷方向存在扰动的优化条件（设计域、载荷点、边界条件以及优化方法）均与载荷方向无扰动一致。图 3 为不同扰动范围下施加对称载荷的悬臂梁结构的拓扑优化构型及柔度值  $C$  的大小，研究选用的载荷方向扰动偏角  $\leq 10^\circ$ ，体积分数为 0.6。



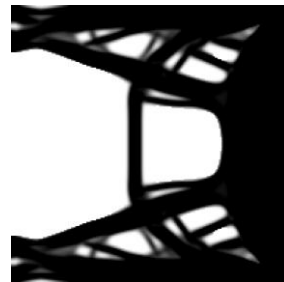
(a)  $C=24.7852$ , upper load ( $90^\circ, 1^\circ, 1^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 1^\circ, 1^\circ$ )



(b)  $C=25.0951$ , upper load ( $90^\circ, 5^\circ, 5^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 5^\circ, 5^\circ$ )



(c)  $C=25.2894$ , upper load ( $90^\circ, 7.5^\circ, 7.5^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 7.5^\circ, 7.5^\circ$ )



(d)  $C=25.4993$ , upper load ( $90^\circ, 10^\circ, 10^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 10^\circ, 10^\circ$ )

图 3 不同扰动范围下的拓扑构型

Fig.3 Topological configurations under different disturbance ranges

通过图 3 可知，施加不确定对称载荷的算例，由于载荷方向上的扰动，所得到的拓扑构型与无扰动所优化出的拓扑构型有明显的区别。当载荷方向上的扰动为  $1^\circ$  时，保持了无支撑结构类似的构型，仅在设计域的上下端生成了两个支杆结构用于抵抗载荷方向上的不确定。当载荷方向上的扰动增加到  $5^\circ$  时，为

了抵抗更大程度的载荷方向上的不确定，由结构中间部分生成了两个新的支杆与固定约束端相连，并且柔度值也随着扰动范围的增加而增大。随着载荷方向上的扰动逐渐增大，拓扑构型虽大体保持对称性和一致性，但是上下四根支杆所占用的材料体积逐渐增大，更有益于抵抗载荷方向上的扰动，柔度值随着扰动范围的增大，有明显的增大趋势。综上所述，载荷方向不确定纳入结构设计过程中能有效的规避无支撑结构问题。

### 3.3 不确定非对称载荷方向的规避无支撑结构

图 3 算例中载荷的方向虽然存在扰动，但是迭代过程中上下载荷扰动的范围是相同的，所得到的拓扑构型是对称结构。为此，通过改变上下两个载荷的扰动范围，使用不确定非对称载荷方向验证所提出方法的有效性。使用两个不同的区间变量对上下载荷的不确定性进行表征，为了简便运算，使用一阶泰勒公式对灵敏度进行求解。

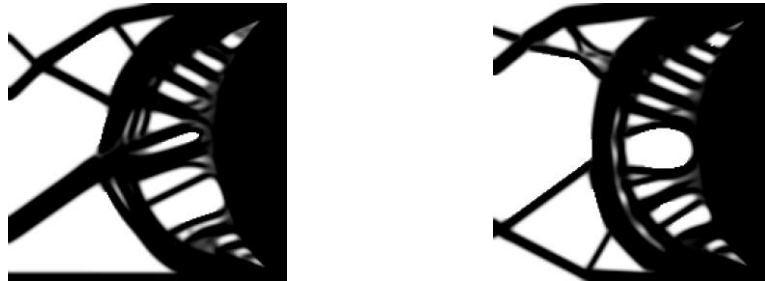
柔度和灵敏度的计算公式与公式 (5) 和公式 (13) 类似<sup>[19]</sup>：

$$C_{\beta,\gamma} \approx C_0 + \frac{\partial C_0}{\partial \beta} \Delta\beta + \frac{\partial C_0}{\partial \gamma} \Delta\gamma \quad (20)$$

$$\frac{\partial C_{\beta,\gamma}}{\partial \rho_e} \approx \frac{\partial C_0}{\partial \rho_e} + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \rho_e \partial \beta} \Delta\beta + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \rho_e \partial \gamma} \Delta\gamma \quad (21)$$

式中： $\Delta\beta$  和  $\Delta\gamma$  分别为设计域上、下方载荷方向与名义载荷方向的差值。

为了涵盖载荷方向完整的不确定性，用载荷的三个特殊方向，即名义载荷方向、载荷方向的上下边界来近似代替载荷方向的不确定性。选取三个方向下绝对值最大的灵敏度用于代入 MMA 算法中更新设计变量。下图为上下扰动范围不同的条件下悬臂梁结构的拓扑优化构型及柔度值  $C$  的大小。



(a)  $C = 31.9693$ , upper load ( $90^\circ, 1^\circ, 1^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 10^\circ, 10^\circ$ )      (b)  $C = 32.6201$ , upper load ( $90^\circ, 5^\circ, 5^\circ$ ), lower load ( $270^\circ, 10^\circ, 10^\circ$ )

图 4 上下载荷不同的扰动范围

Fig.4 Disturbance ranges with different upper and lower loads

与图 3(d)相比，图 4 的结果表明，随着上下载荷扰动范围差异的增加，结构的非对称性逐渐明显，且非对称载荷对结构柔度的影响更为显著。

## 4 结论

本文研究了载荷方向不确定条件下扰动范围对规避无支撑结构的影响。采用区间变量来表征载荷方向上的不确定性，选取载荷方向范围内对柔度影响最大的加载条件作为最敏感条件，利用泰勒公式求解最敏感加载条件下的灵敏度，使用 SIMP 模型以及 MMA 算法对连续体结构进行稳健性设计。通过数值算例验证了载荷方向不确定纳入优化设计中可以规避无支撑问题。得到以下结论。

1) 相比于确定对称载荷，考虑载荷方向不确定性的结构优化可有效规避无支撑结构。

2) 不确定对称载荷条件下，随着扰动范围增大，结构柔度呈上升趋势，载荷端与约束端相连的支柱结构变多，结构总体保持对称性。

3) 相比于不确定对称载荷, 不确定非对称载荷的非对称性对结构柔度的影响显著, 且随扰动范围差异的增大, 结构的非对称性更为明显。

## 参考文献:

- [1] 占金青, 汪庭威, 段丁强, 等. 基于多相材料的完全解耦柔顺机构拓扑优化设计[J]. 华东交通大学学报, 2022, 39(6): 77-83.  
ZHAN J Q, WANG T W, DUAN D Q, et al. Topological design of fully decoupled compliant mechanisms with multiple materials[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2022, 39(6): 77-83.
- [2] 占金青, 龙良明, 林春辉, 等. 非均匀温度场下的热固耦合结构多相材料拓扑优化[J]. 华东交通大学学报, 2018, 35(5): 117-123.  
ZHAN J Q, LONG L M, LIN C H, et al. Multi-material topology optimization of thermo-mechanical coupling structure in non-uniform temperature field[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2018, 35(5): 117-123.
- [3] 占金青, 彭怡平, 龙良明, 等. 基于应力约束的多相材料结构拓扑优化设计[J]. 计算机集成制造系统, 2021, 27(1): 149-155.  
ZHAN J Q, PENG Y P, LONG L M, et al. Topology optimization of multiple materials continuum structure with stress constraints[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2021, 27(1): 149-155.
- [4] 于海, 杨慧斌, 茅健, 等. 基于SIMP变密度法的结构拓扑优化及应用[J]. 工程塑料应用, 2024, 52(10): 91-99.  
YU H, YANG H B, MAO J, et al. Structural topology optimization based on SIMP variable density method and its application[J]. Engineering Plastics Application, 2024, 52(10): 91-99.
- [5] 陈小前, 赵勇, 霍森林, 等. 多尺度结构拓扑优化设计方法综述[J]. 航空学报, 2023, 44(15): 528863.  
CHEN X Q, ZHAO Y, HUO S L, et al. A review of topology optimization design methods for multi-scale structures[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(15): 528863.
- [6] SIGMUND O. A 99 line topology optimization code written in Matlab[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 21(2): 120-127.
- [7] 王辉. 不确定性连续体结构的拓扑优化研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2021.  
WANG H. Research on topology optimization of uncertain continuum structure[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2021.
- [8] 杜鼎新, 王栋. 载荷方向不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计[J]. 力学学报, 2023, 55(11): 2588-2598.  
DU D X, WANG D. Robust dynamic topology optimization of continuum structure subjected to harmonic excitation with loading direction uncertainty[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(11): 2588-2598.
- [9] DE S, MAUTE K, DOOSTAN A. Topology optimization under microscale uncertainty using stochastic gradients[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 66(1): 17.
- [10] 付志方, 王春洁. 载荷不确定的周期性结构稳健拓扑优化[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(4): 747-753.  
FU Z F, WANG C J. Robust topology optimization of periodic structures under uncertain loading[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(4): 747-753.
- [11] ZHANG X P, KANG Z, ZHANG W B. Robust topology optimization for dynamic compliance minimization under uncertain harmonic excitations with inhomogeneous eigenvalue analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 54(6): 1469-1484.
- [12] WANG D, GAO W F. Robust topology optimization under multiple independent uncertainties of loading positions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2020, 121(22): 4944-4970.
- [13] GUO X, ZHANG W S, ZHANG L. Robust structural topology optimization considering boundary uncertainties[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 253: 356-368.
- [14] KANG Z, WU C L, LUO Y J, et al. Robust topology optimization of multi-material structures considering uncertain graded interface[J]. Composite Structures, 2019, 208: 395-406.
- [15] ZHENG J, LUO Z, JIANG C, et al. Robust topology optimization for concurrent design of dynamic structures under hybrid uncertainties[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 120: 540-559.
- [16] PENG X, LI J Q, JIANG S F, et al. Robust topology optimization of continuum structures with loading uncertainty using a perturbation method[J]. Engineering Optimization, 2018, 50(4): 584-598.
- [17] 王栋, 高伟峰. 载荷位置不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计[J]. 应用力学学报, 2020, 37(3): 969-974, 1384.  
WANG D, GAO W F. Robust topology optimization of continuum structures with load position uncertainty[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(3): 969-974, 1384.
- [18] WANG D, GAO W F. Robust topology optimization under load position uncertainty[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2019, 120(11): 1249-1272.
- [19] 王栋. 载荷作用位置不确定条件下结构动态稳健性拓扑优化设计[J]. 力学学报, 2021, 53(5): 1439-1448.

---

WANG D. Robust dynamic topology optimization of continuum structure subjected to harmonic excitation of loading position uncertainty[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1439-1448.

[20] 费晨, 王晓拓, 倪成功, 等. 考虑外载荷方向不确定性的稳健性拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2024, 41(3): 582-587.

FEI C, WANG X T, NI C G, et al. Robust topology optimization considering the uncertainty of load direction[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2024, 41(3): 582-587.



**第一作者:** 喻圣林 (2000—), 男, 硕士研究生, 研究方向为智能结构损伤自修复。



**通信作者:** 李鹏 (1976—), 男, 教授, 博士, 研究生导师, 研究方向为智能结构损伤自修复与健康监测。