

振动落砂机的基础减振问题

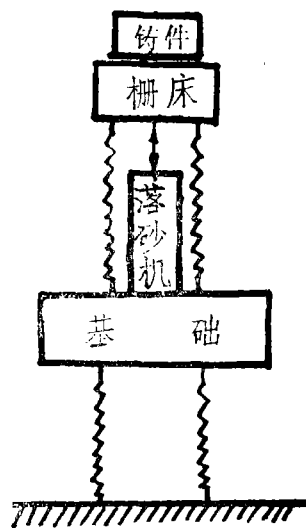
吕 绍 棣

(理论力学教研室)

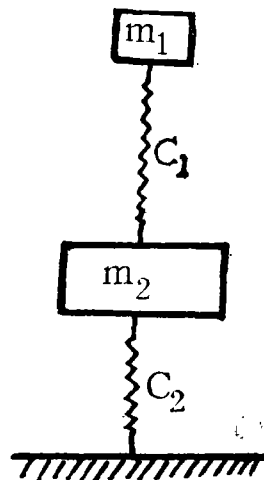
摘 要

落砂机的基础振幅应当尽可能地小, 以免影响周围环境和落砂效果。本文提供了保证基础振幅较小的各种振动参数的计算公式, 它是对只考虑上部机构的落砂机振动参数计算公式 [1] [2] 的必须的补充。

一 落砂机结构原理简图



图一



图二

图一是振动落砂机原理简图。铸件放在栅床上, 振动落砂机产生周期性的激振力, 推动栅床振动, 使栅床撞击铸件, 从而使铸件上的砂型脱落, 达到落砂效果。

其力学模型如图二所示, 简化为二个自由度系统的振动问题。图中:

m_1 ——栅床质量, C_1 ——支承栅床的弹簧刚度。 m_2 ——基础质量。 C_2 ——支承基础之地基弹性系数。

本文于1986年1月7日收到

本文第一步，先推导栅床和基础的振动微分方程，第二步求出振幅比值与参振物理量的关系，第三步，研究振动参数的选择以达到降低基础振幅的目的。

二 栅床和基础的振动微分方程

图三中， x_1 代表栅床振动位移， x_2 代表基础振动位移。

把 x_1 坐标原点放在 m_1 （栅床）静平衡位置， x_2 坐标原点放在 m_2 （基础）静平衡位置。假定 m_1 和 m_2 运动到某一位置如图三所示。列出动力学微分方程如下：

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -C_1(x_1 - x_2) + Q \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 = +C_1(x_1 - x_2) - C_2 x_2 \end{cases}$$

上式中

Q ——落砂机激振力的最大值

ω ——激振力的频率

这里没有考虑铸件碰撞对基础的影响，因为实测证明〔3〕，无铸件碰撞时基础振幅比有铸件碰撞时振幅大，因而不考虑铸件碰撞的影响。

上述微分方程中，令

$$\frac{C_1}{m_1} = k_1^2 \text{ —— 称为栅床固有频率}$$

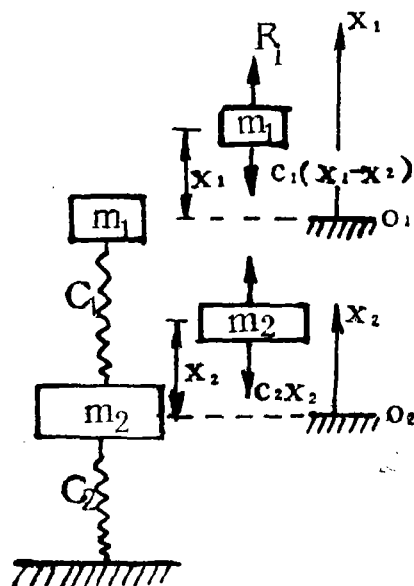
$$\frac{C_1}{m_2} = k_{12}^2$$

$$\frac{C_1 + C_2}{m_2} = k_2^2 \text{ —— 称为基础固有频率}$$

$$\frac{Q}{m_1} = q \text{ —— 栅床单位质量的激振力}$$

微分方程变为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + k_1^2 x_1 - k_{12}^2 x_2 = q \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 - k_{12}^2 x_1 + k_2^2 x_2 = 0 \end{cases}$$



图三

假定上述微分方程的特解为

$$x_1 = A_1 \sin \omega t$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t$$

上式对时间 t 导数二次, 得

$$\ddot{x}_1 = -A_1 \omega^2 \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_2 = -A_2 \omega^2 \sin \omega t$$

把 $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ 代入微分方程, 等式也应成立

$$\begin{cases} -A_1 \omega^2 + k_{11}^2 A_1 - k_{12}^2 A_2 = q \\ -A_2 \omega^2 - k_{12}^2 A_1 + k_{22}^2 A_2 = 0 \end{cases}$$

求得振幅:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} q & -k_{12}^2 \\ 0 & (k_{22}^2 - \omega^2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{q(k_{22}^2 - \omega^2)}{\Delta}$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} (k_{11}^2 - \omega^2) & q \\ -k_{12}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{q k_{12}^2}{\Delta}$$

式中:

$$\Delta = (k_{11}^2 - \omega^2)(k_{22}^2 - \omega^2) - k_{12}^2 k_{12}^2$$

A_1 ——棚床振幅; A_2 ——基础振幅

至此, 我们得到了棚床和基础的振幅, 也得到了各自的运动方程。

在振幅公式中, 若令

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{k_{11}} = \frac{\text{激振力频率}}{\text{棚床固有频率}} \quad (\text{称为棚床调谐值})$$

$$\lambda_{12} = \frac{\omega}{k_{12}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\omega}{k_{22}} = \frac{\text{激振力频率}}{\text{基础固有频率}} \quad (\text{称为基础调谐值})$$

振幅公式变为

$$A_1 = \frac{q}{\omega^2} \frac{\frac{1}{\lambda_2^2} - 1}{(\frac{1}{\lambda_1^2} - 1)(\frac{1}{\lambda_2^2} - 1) - \frac{1}{\lambda_{12}^2} \frac{1}{\lambda_2^2}}$$

$$= \frac{q}{\omega^2} \frac{\lambda_1^2(1 - \lambda_2^2)}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2}}$$

$$A_2 = \frac{q}{\omega^2} \frac{1}{\lambda_{12}^2} \frac{\lambda_2^2}{(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_2^2) - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{q}{\omega^2}} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

振幅是振动参数 q 、 ω 、 λ_1 、 λ_2 和 λ_{12} 的函数。

三 振幅比值的讨论

从振幅公式 (1) 中, 得到基础与栅床振幅比值为:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2 |\lambda_2^2 - 1|} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{1}{|\lambda_2^2 - 1|} \dots\dots\dots (2)$$

即振幅比值随调谐值 λ_1 、 λ_2 和 λ_{12} 等振动参数的变化而变化。我们希望 A_2 值小, 而 A_1 值较大。当基础很重大时, A_2 值确实很小。但当基础不够重大时, 我们也要求 A_2 值大大小于 A_1 值, 才能使落砂机发挥落砂作用, 同时使地面振幅减小。为此, 我们规定基础振幅 A_2 是栅床振幅 A_1 的5%, 即

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2 |\lambda_2^2 - 1|} \leq 5\% \dots\dots\dots (3)$$

现在寻找 λ_{12} 和 λ_2 的关系:

$$\frac{1}{\lambda_{12}^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{C_1}{m_2} \right) = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{C_1 + C_2}{m_2} - \frac{C_2}{m_2} \right) = \frac{1}{\omega^2} (k^2_2 - k^2_{02})$$

$$\frac{1}{\lambda_{12}^2} = \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_{02}^2} \dots\dots\dots (4)$$

在上式中, 令

$$k_{02}^2 = \frac{C_2}{m_2}, \quad \lambda_{02} = \frac{\omega}{k_{02}}$$

从(4)式中可以看出, 选择振动参数时要注意:

$$\lambda_{12}^2 > \lambda_2, \quad \lambda_{02} > \lambda_2$$

现在举例说明(3)式的应用。

(例) 已知: $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_{02} = 5$

$$\text{求: } \frac{A_2}{A_1} = ?$$

$$\text{解: } \frac{1}{\lambda_{12}^2} = \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_{02}^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{25} = \left(\frac{3}{20}\right)^2$$

$$\lambda_{12} = \frac{20}{3} = 6.67$$

代入到振幅比值公式(3)中

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2 |\lambda_2^2 - 1|} = \frac{16}{\frac{400}{9} (16 - 1)} = 0.024$$

同时可求得 C_1 、 C_2 之关系:

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_{12}^2} = \frac{4^2}{\left(\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{9}{25}, \quad C_1 = \frac{9}{25}(C_1 + C_2)$$

$$C_1 = \frac{9}{16} C_2$$

四 几个振动参数的关系式及振动参数选择

$$\frac{1}{\lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_{12}^2} + \frac{1}{\lambda_{02}^2} \dots\dots\dots(4)$$

此式已证。

$$\lambda_{12}^2 = S^2 \lambda_1 \dots\dots\dots(5)$$

式中

$$S = \frac{m_2}{m_1} \text{ (质量比)}$$

公式 (5) 推导如下: 已知

$$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{12}^2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_1}} = \frac{1}{1 + r}$$

式中令:

$$r = \frac{C_2}{C_1} \text{ (称为刚度比)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12}^2 &= (1 + r) \lambda_{22}^2 = \frac{(1 + r) \omega^2}{k_{22}} = (1 + r) \frac{\frac{\omega^2}{C_1 + C_2}}{\frac{1}{m_2}} \\ &= (1 + r) \frac{\omega^2 m_2}{(1 + r) C_1} = \frac{\omega^2 m_2}{C_1} = \frac{\omega^2 m_2}{k_{11} m_1} = \lambda_{11}^2 \cdot S \end{aligned} \quad (\text{证毕})$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{11} \sqrt{\frac{S}{r}} \dots\dots\dots (6)$$

证: 已知

$$C_2 = m_2 k_{22} = m_2 \frac{\omega^2}{\lambda_{22}^2}$$

$$C_1 = m_1 k_{11} = m_1 \frac{\omega^2}{\lambda_{11}^2}$$

上两式相除, 得

$$r = S \frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_{22}^2}$$

$$\lambda_{22} = \lambda_{11} \sqrt{\frac{S}{r}} \quad (\text{证毕})$$

$$\lambda_2 = \lambda_{02} \sqrt{\frac{r}{1+r}} = \lambda_1 \sqrt{\frac{S}{1+r}} \dots\dots\dots (7)$$

已知:

$$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_2^2} = 1+r$$

$$\frac{1}{\lambda_2^2(1+r)} = \frac{1}{\lambda_{12}^2}$$

代入公式(4), 得

$$\frac{1}{\lambda_{02}^2} = \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_{12}^2} = \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{(1+r)\lambda_2^2} = \frac{1}{\lambda_2^2} \left(\frac{r}{1+r} \right)$$

得到

$$\lambda_2^2 = \lambda_{02}^2 \frac{r}{1+r}, \quad \lambda_2 = \lambda_{02} \sqrt{\frac{r}{1+r}}$$

把(6)式 $\lambda_{02} = \lambda_1 \sqrt{\frac{S}{r}}$ 代入上式, 得

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2 \frac{S}{r} \left(\frac{r}{1+r} \right) = \frac{S}{1+r} \lambda_1^2 \text{ (证毕)}$$

有了上述几个关系式, 可以找出振幅比值与振动参数 λ_1 、 r 及 S 之间的关系。

考虑到(5) (7) 式, 对(3) 式

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{r}{1+r} \frac{1}{|\lambda_2^2 - 1|} \leq \frac{1}{20}$$

分 $\lambda_2 > 1$ 和 $\lambda_2 < 1$ 两种不同情况进行讨论。

(a) 当 $\lambda_2 > 1$ 时, 因为

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{1}{1+r} \frac{1}{|\lambda_2^2 - 1|} \leq \frac{1}{20}$$

所以其分母: $(1+r)|\lambda_2^2 - 1| \geq 20$

把(7)式代入:

$$(1+r)(\lambda_2^2 - 1) = (1+r)\left(\frac{S}{1+r}\lambda_1^2 - 1\right) \geq 20$$

得到

$$S\lambda_1^2 - (1+r) \geq 20$$

$$\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{21+r}{S}} \quad (\text{此时 } \frac{A_2}{A_1} \leq 5\%) \dots\dots\dots (8)$$

(例) 已知: 取 $r = \frac{C_2}{C_1} = 1$ $S = \frac{m_2}{m_1} = 2.5$

求: $\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{21+r}{S}} = \sqrt{\frac{21+1}{2.5}} = 2.8$

(例) 已知: 取 $\lambda_1 = 0.9$, $r = 1$

求: $S \geq (21+r)/\lambda_1^2 = (21+1)/0.81 = 4.49$

(例) 已知: $S = 1.89$, $r = 1$

求: $\lambda_1 \geq \sqrt{\frac{21}{1.89}} = 3.33 = 3.5$

$$\lambda_{02} = \lambda_1 \sqrt{\frac{S}{r}} = 3.5 \sqrt{\frac{1.89}{1}} = 4.8$$

$$\lambda_2 = \lambda_{02} \sqrt{\frac{r}{(1+r)}} = 4.8 \sqrt{\frac{1}{2}} = 3.39$$

代入到:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+r} \frac{1}{\lambda_2^2 - 1} = \frac{1}{1+1} \frac{1}{3.39^2 - 1} = 0.048 = 4.8\%$$

(b)当 $\lambda_2 < 1$ 时, 由

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{1}{1+r} \frac{1}{|\lambda_2^2 - 1|} \leq \frac{1}{20}$$

知, 其分母:

$$(1+r)(1-\lambda_2^2) \geq 20$$

把 (7) 式代入上式, 得

$$(1+r)(1 - \frac{\lambda_1^2 S}{1+r}) \geq 20$$

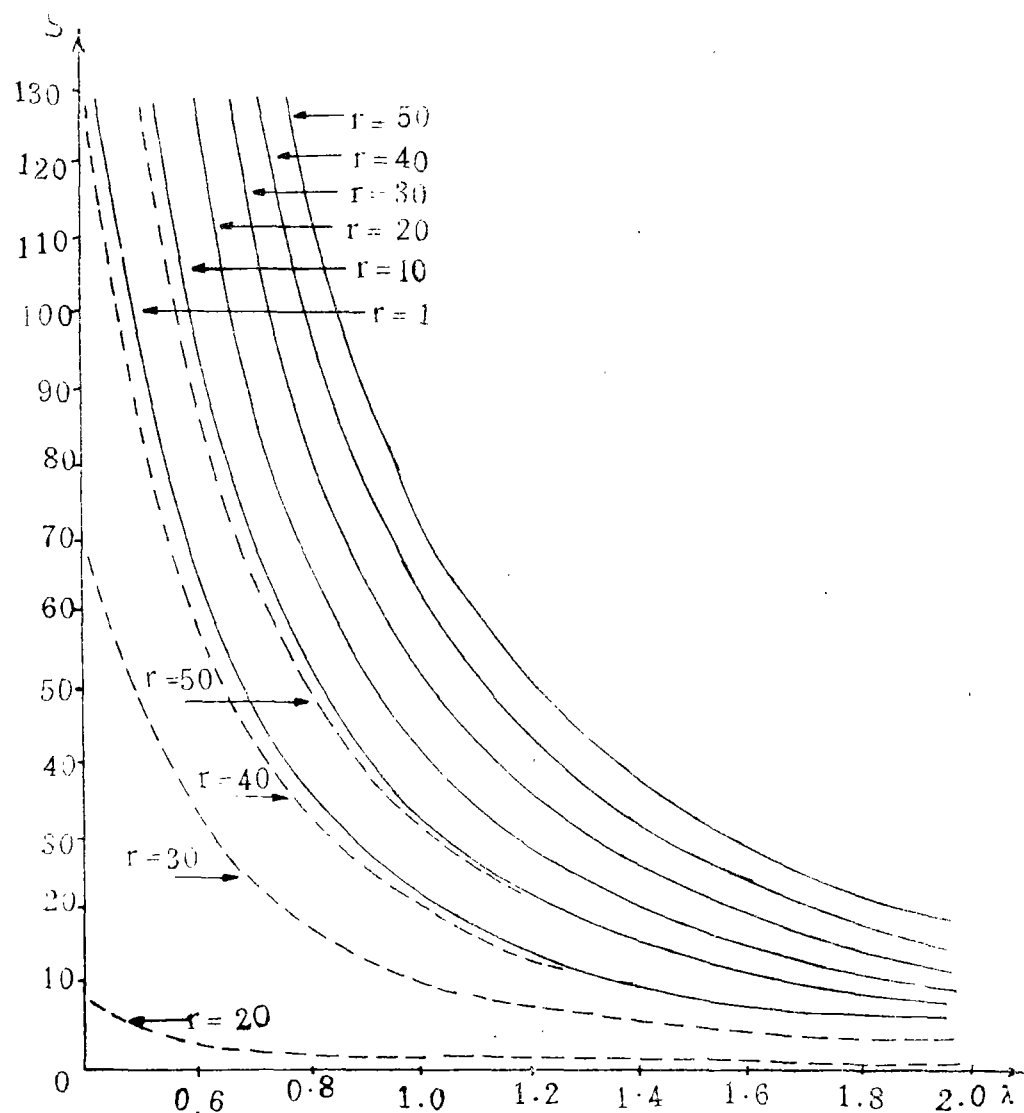
$$(1+r - S\lambda_1^2) \geq 20$$

$$\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{r-19}{S}} \quad (\text{此时 } \frac{A_2}{A_1} \leq 5\%) \dots\dots\dots (9)$$

$\lambda_2 < 1$ 时, 只有当 $r > 19$, (9) 式才有意义, 否则 λ_1 是虚数。

(8)、(9) 式就是保证基础振幅较小时, 各振动参数的关系式。

为了实用方便, 各振动参数关系曲线如图所示, 是通过计算机计算绘制的。 $Z_2 > 1$ 时, 用实曲线表示; $Z_2 < 1$ 时, 用虚曲线表示。



图四

下面举一个生产实例，证明振动参数选择的重要性。

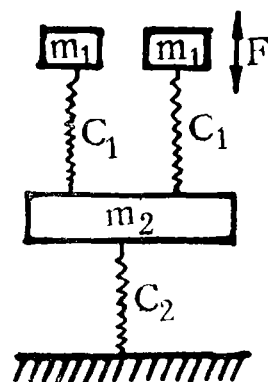
(例) 某工厂采用二台电磁振动落砂机，放在同一基础上。已知激振力频率 $\omega = 600$ 转/分，每个栅床重 $P_1 = 6.8$ 吨，基础重 $P_2 = 417$ 吨，刚度 $C_1 = 3750$ 吨/米， $C_2 = C_1 \cdot \text{底面积} = 238400$

吨/米，(1)当单机开动时，求出振幅比 $\frac{A_2}{A_1} = ?$ 并与实测数据比较。(2)双机同时开动，

并同向振动，求 $\frac{A_2}{A_1} = ?$ 并讨论振动参数是否适合双机工作。现场测试数据如表 I 所示。

表 I 双落砂机基础边角振幅测试数据

	激振力 ω	λ_1	栅床振 幅 A_1	基础振 幅 A_2	$\frac{A_2}{A_1}$	环境 干扰
单机激振	20π	0.854	4mm	0.18 mm	4.5%	0.01
双机同向振动	20π	0.854	4mm	0.33 mm	9%	0.05



图五

(解) (1) 单机激振时:

$$\omega = 20 \pi \text{ rad/s}$$

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{C_1} = \omega \sqrt{\frac{m_1}{K_1}} = 20\pi \sqrt{\frac{6.8}{9.8 \times 3750}} = 0.854$$

$$S = \frac{m_2}{m_1} = \frac{423}{6.8} = 62.20$$

$$r = \frac{C_2}{C_1} = \frac{238400}{3750} = 63.5$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{S}{1+r}} \lambda_1 = \sqrt{\frac{62.23}{64.5}} \lambda_1 = 0.838$$

上述数据代入 (3) 式求得

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1+r} \frac{1}{|\lambda_2^2 - 1|} = \frac{1}{64.5} \frac{1}{(0.69-1)} = 0.052$$

从上述计算说明, 理论值 $A_2/A_1 = 5.2\%$, 实测值为 4.5% , 理论值和实测值很接近, 说明理论公式的可靠性。基础的振幅只有栅床振幅的 5% , 说明本机振动参数适合单机工作。

(2) 双机组同向振动时各参数符号定义如下:

$$r = \frac{C_2}{2C_1}, \quad S = \frac{m_2}{2m_1}, \quad q = \frac{Q}{m_1},$$

$$k_1^2 = \frac{C_2}{m_1}, \quad k_{12}^2 = \frac{2C_1}{m_2}, \quad k_2^2 = \frac{2C_1 + C_2}{m_2}$$

根据题设已知条件, 可求得

$$S = \frac{417}{2 \times 6.8} = 30.16$$

$$r = \frac{C_2}{2C_1} = 31.76$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{1+r}} \lambda_1 = 0.819$$

代入公式，求得

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{(1+r)(\lambda_2^2 - 1)} = 0.0927 \approx 9.2\%$$

从上面计算说明：

(1) 计算值 $\frac{A_2}{A_1} = 9.2\%$ 实测值 $\frac{A_2}{A_1} = 9\%$ ，这两个值很接近，说明力学模型

可靠性。

(2) 由于 $\frac{A_2}{A_1} = 9.2\%$ ，基础的振瞄是栅床振瞄9%，基础振瞄较大，该厂工人已感

到很不安全，说明此落砂机的振动参数不适合双机激振生产，而要适合双机同时工作，必须重新选择振动参数。

为此，第一个办法，保持 γ 、 S 不变，据 (9) 式，求出 $\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{r-19}{S}} = 0.66$ ，即用

降低调谐值 λ_1 的办法来减少基础的振动。当然， λ_1 降低过多，会影响激振力，需根据文献 [1] [2] 公式重新设计。第二个办法是 λ_1 、 S 不变，调整 γ 值，由 (9) 式求得：

$$r \geq 19 + S \lambda_1^2 = 19 + 30.16 \times 0.714 = 40.5, \quad \text{即 } \frac{C_2}{2C_1} = 41, \quad C_2 = 300000 \text{ 用加大基础底}$$

面积来实现。

参 考 文 献

- [1] 西南交大理力组落砂机小组：“落砂机性能测定问题的探讨”，铸造机械，1974. 第四期
- [2] 舒伸周“连续式惯性振动落砂机的振动参数选择”，铸造机械，1979，第6期
- [3] 大隆机器厂“电磁振动落砂机的振动平衡减振法”。铸造机械1979第3期