

# 齿轮传动稳态过程动载荷计算与分析

王 中 庆

(机 械 系)

## 摘 要

本文采用了动态非线性齿轮振动模型(图6),考虑了KED三方面问题从能量守恒出发分析了“啮合系统”中产生“静差”的机理,推导了产生平均附加动载公式(9)又根据啮合系统和齿轮付之间关系推导了齿轮系统动载荷系数计算公式(14),从而分析了齿轮传动过程中引起振动的基本原因,揭示了影响动载荷的诸因素。作者首次利用齿轮传动系统的“静差”概念来描述静态精度,计算平均附加动载荷;从动态分析着手,解析了引起系统振动的激振力,将传统的载荷系数,动载系数和使用系数三种概念统一采用系统动载荷系数来描述。本质上反映了输入——系统——输出之间的关系,这为深入研究齿轮传动状态特性提出了新的途径。

一对齿轮的传动过程的振动特点属于两个“质量——阻尼——弹簧”系统的机械耦合性质。在齿轮传动过程中,当轮齿通过啮合区域时,由于相对运动误差,节圆周速度,迴转部分惯性与刚性,单位齿宽周力,轮齿刚性的变化以及阻尼因素影响将引起轮齿激振(1),这些因素的影响可以用动载荷系数来表示。

为了研究的方便,一对齿轮付的传动特性可近似地用一般动态方块图来示意。(见图1)

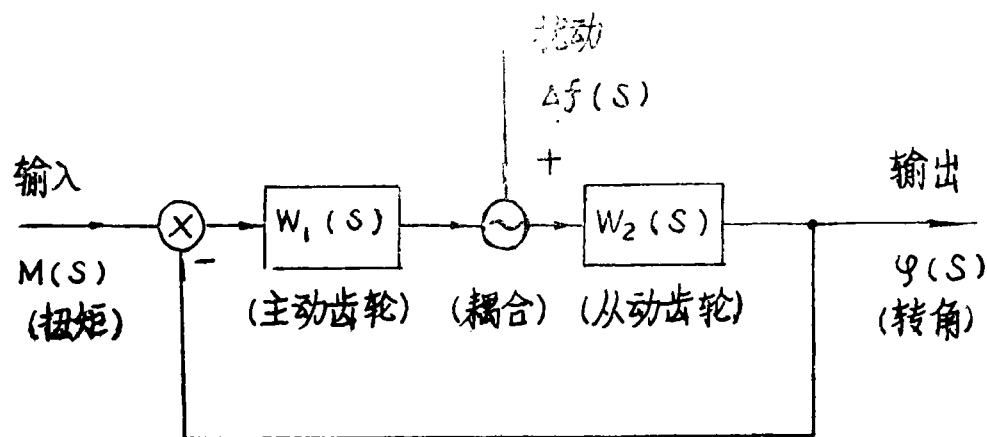


图 1 动态方块图

本文于1984年9月2日收到

图中：⊗表示耦合记号； $W_1(S)$ 、 $W_2(S)$ 、为传递函数； $M(S)$ 、 $\varphi(S)$ 、 $\Delta f$ 为象函数、  
上述特性已由如下实验所证实：

(1) 时域测定的过渡过程曲线：

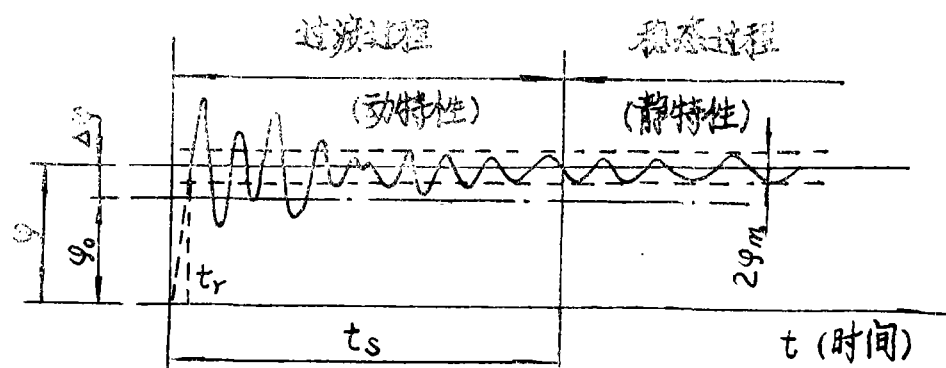


图2 时域曲线

说明一对齿轮付传动的动特性属于非线性系统的振动问题，并存在“扰动静差”，即非线性的有差系统。

(2) 频域测定的幅频曲线。

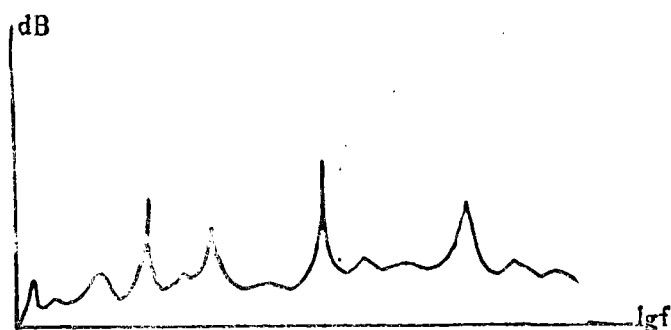


图3 频谱曲线

说明一对齿轮付传动的“幅频曲线”与“振动耦合”和“脱齿振动”、“结构振动”有密切关系。而“耦合”状态，脱啮性质与传动速度及相对运动曲线有密切关系。齿轮传动系统并非是一个简单的“单自由度振动”系统所能描述的。

(3) 相对运动误差曲线

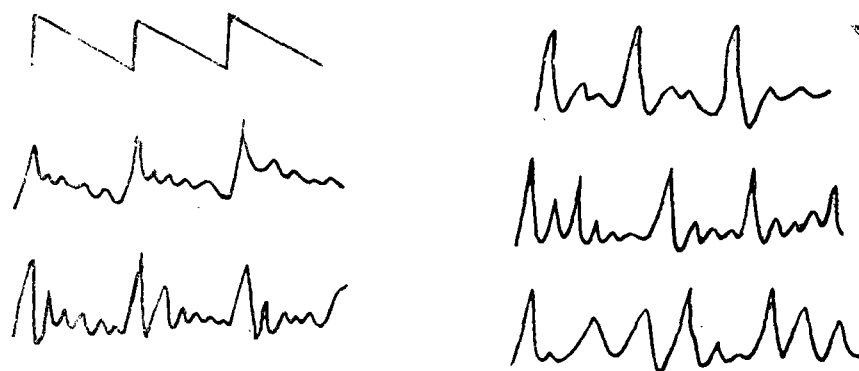


图4 相对运动误差曲线与转速关系

说明一对齿轮副传动过程中，随着速度（转速）提高，谐波分量由高变低（甚至会激起共振），脱啮与撞击越加严重。这种“脱啮”严重性与每个齿廓形状和位置误差，转动速度有密切关系。以急剧升高相对压力角误差时，振动系统的动态影响而产生“脱啮”最严重。我们可用以下图示说明



图5 脱啮与转速关系

上述情况误差形状产生的“动载荷”也是为最大。

综合上述分析，本文仅对稳态过程中产生最大动载荷时的特性讨论。一对齿轮副的传动，可简化如图6的动态非线性振动模型来研究。

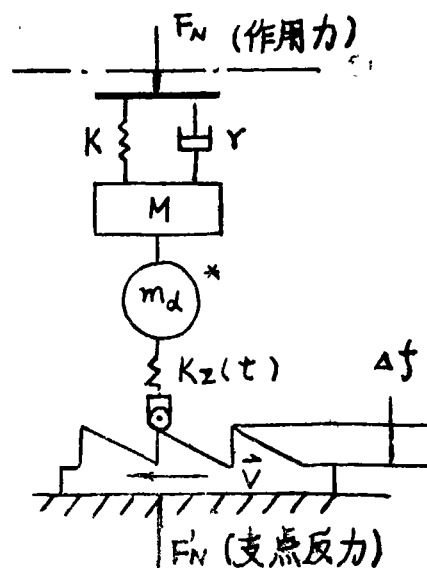


图6 齿轮副等效模型

图中,  $K$ : 轴系和轴承等效刚度

$\gamma$ : 系统等效粘性阻尼系数

$K_z$ : 啮合刚度

$m_d$ : 啮合系统冲击有效质量

$M$ : 系统等效质量

$\Delta f$ : 相对运动有效误差值

图6假设误差相当于“楔块”作用于“质量——弹簧”系统。为了便于研究稳态过程“静差”特性的形成机理, 又可将图6, 采用运动隔出分析方法来研究。(见图7)

\*  $\circ$ 表示虚构质量意义, 这里反映了啮合冲击, 冲击能量为  $\Delta_c E = \frac{1}{2} m_d \Delta \dot{\epsilon}^2(t)$ 。

$\Delta \epsilon(t)$ 表示相对齿形误差量,  $\Delta \dot{\epsilon}(t)$ 则表示相对形齿误差变化率(即速度)

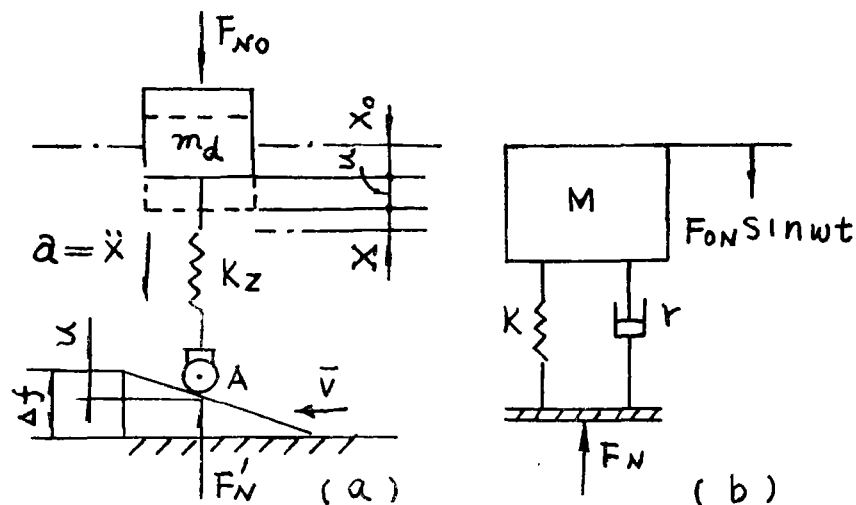


图7

图中表示了传动副啮合系统的运动情况。

$F_{n0}$ : 表示作用在 $m_d$ 上的初始力。

$x_0$ : 表示 $m_d$ 的初位移。

齿形误差相当楔块, 误差的影响相当于在弹簧端部插入薄的楔形块作用。在时间  $t$  内, 楔块向左运动, 使物块 $m_d$ 移动 $u$ 距离, 弹簧所受的力平均减少 $\frac{1}{2}K_z(\Delta f - u)$ , 那么物块 $m_d$ 产生的惯性力为:

$$m_d a = -\frac{1}{2}k_z (u - \Delta f)$$

产生的加速度

$$a = \frac{k_z}{2m_d} (\Delta f - u)$$

等效物块 $m_d$ 移动距离 $u$ 可由下式求出:

$$u = \frac{1}{2}at^2 = \frac{K_z(\Delta f - u)}{4m_d}t^2$$

解得

$$u = \frac{K_z \Delta f t^2}{4m_d + K_z t^2} \quad (1)$$

当楔块继续运动, 弹簧A端开始静止时, 物块又因惯性作用将继续移动 $X$ 距离, 从而在弹簧中产生附加力。因此齿轮传动过程的“静差”特性, 是由于齿轮啮合系统的质量 $m_d$ ,

齿廓的啮合刚度 $K_z$ 和传动过程的相对运动误差 $\Delta f$ 及转速大小而引起的, 啮合弹簧中最大的动载荷可由这个啮合系统的能量守恒关系来求出。 $F_{n0}$ 作用力所作的功:

$$F_{n0}(u + X) = K_z X_0(u + X)$$

弹簧A端的反作用力 $F'_n = K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)$ , 在此区间这个力所做的功等于:

$$F'_n \Delta f = [K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)] \Delta f$$

上述表达了外力所作净功 $W$ , 即:

$$\begin{aligned} W &= F_{n0}(u + X) - F'_n \Delta f \\ &= K_z X_0(u + X) - [K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)] \Delta f \end{aligned}$$

设弹簧的最大压缩量 $X_{max}$ :

$$X_{max} = X_0 + u + X - \Delta f \quad (2)$$

那么弹簧的应变能为:

$$U = \frac{1}{2} K_z X_{max}^2 - \frac{1}{2} K_z X_0^2$$

弹簧的应变能应该等于外力所作的功, 即 $U = W$

$$\begin{aligned} K_z X_0(u + X) - (K_z X_0 - \frac{1}{2} K_z (\Delta f - u)) \Delta f \\ = \frac{1}{2} K_z X_{max}^2 - \frac{1}{2} K_z X_0^2 \end{aligned}$$

由上式化简得:

$$\begin{aligned} X_{max}^2 - 2X_0 X_{max} + X_0^2 - \Delta f(\Delta f - u) &= 0 \\ \text{可得: } X_{max} &= X_0 + \sqrt{\Delta f(\Delta f - u)} \quad (3) \end{aligned}$$

那么, 弹簧所受的最大力为:

$$\begin{aligned} F_{jd} &= K_z X_{max} = K_z X_0 + K_z \sqrt{\Delta f(\Delta f - u)} \\ &= F_{n0} + K_z \Delta f \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (4) \end{aligned}$$

稳态过程, 动载荷系数为:

$$K_{jd} = \frac{F_{jd}}{F_{n0}} = 1 + \frac{K_z \Delta f}{F_{n0}} \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (5)$$

力静差 (即平均附加动载荷) 为:

$$\Delta F_{ja} = K_d - F_{n0} = K_z \Delta f \sqrt{1 - \frac{u}{\Delta f}} \quad (6)$$

$$\text{若将: } \begin{cases} t = 60/Zn = 1/f_z \\ u = \frac{K_z \Delta f t^2}{4m_d + K_z t^2} \end{cases} \quad (7)$$

代入 (5) 式与 (6) 式得

$$\begin{aligned} K_{jd} &= 1 + \frac{K_z \Delta f}{F_{n0}} \sqrt{1 - \frac{K_z}{4m_d f_z^2 + K_z}} \\ &= 1 + C \frac{\Delta f}{F_{n0} t} \sqrt{K_z m_d} \end{aligned} \quad (8)$$

因此,

$$\Delta F_n = C \frac{\Delta f}{t} \sqrt{K_z m_d} \quad (9)$$

以上式中:

$n$ : 主动齿轮转速       $Z$ : 主动齿轮齿数  
 $C$ : 楔抽出时间常数       $f_z$ : 啮合频率

$$\begin{aligned} \text{可知: } \Omega_z &= f_z \sqrt{\frac{K_z}{m_d}} \quad (\text{频率比}) \\ \left\{ \begin{aligned} C &= \sqrt{\frac{4}{4\Omega_z^2 + 1}} > 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (10)$$

当  $\Omega_z \rightarrow 0$  时

$$C = C_{\max} = 2$$

且  $m_d$  可由下式求出

$$\begin{aligned} 1/m_d &= 1/m_1'^2 + 1/m_2'^2 \\ \begin{cases} m_1' = J_1/r_{b1}^2 \\ m_2' = J_2/r_{b2}^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

$J_2$  惯性矩       $r_b$ ——基元半径

而啮合刚度  $K_z$  值决定于由于弯曲、剪切、接触应力引起轮齿的变形、 $1/K_z$  的合理平均值是。

[3] [4]:

$$1/K_z = q (1/E_1 + 1/E_2) \sec \beta \quad (12)$$

E: 材料弹性模量, “1”表示主动轮, “2”表示被动轮。

q: 弹性系数

$\beta$ : 螺旋角

对于齿轮副整个传动系统而言, 由图2、图7分析可知, 动载荷为:

$$\begin{aligned} F_d &= F_n + \Delta F_n + A(\omega) \sum F_{m_i} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ &= TF_{nc} + \Delta F_n + A(\omega) \sum F_{m_i} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (13)$$

系统动载荷系数:

$$\begin{aligned} K_d &= T + \frac{\Delta F_n}{F_{n0}} + A(\omega) \sum \frac{F_{m_i}}{F_{n0}} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \\ &= T + C \frac{\Delta f}{t F_{n0}} \sqrt{K_z m_d} + A(\omega) \frac{\varepsilon}{2} \\ &= T + (K_{jd} - 1) + \frac{1}{2} A(\omega) \varepsilon \end{aligned} \quad (14)$$

式中, 隔振系数:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}} \quad (15)$$

放大系数:

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (16)$$

频率比:

$$\Omega = \frac{\omega_i}{\omega_n} \quad (17)$$

$\omega_n$ ——固有频率

阻尼比:

$$\xi = \frac{r}{rc} = \frac{r}{2m\omega_n} \quad (18)$$

稳态过程载荷相对变率:

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{F_{ni}}}{F_{n0}} = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{F_{n0}} \quad (19)$$

$\varepsilon$ 反映载荷变动量,即与原动机和工作机负荷不均匀性有关的参数,这是一个统计量。 $F_{ni}$ 表示载荷变动振幅。

## 小 结

我们可以通过(14)式对齿轮副转动过程动载特性进行分析:尽管齿轮传动系统振动的原因和模态很复杂,本文却把这系统振动简化归纳为三个部分:

- (1) 齿轮传动系统本身互相隔振的效果,即轮系效应;
- (2) 齿轮副啮合系统的等效冲击质量,刚性、误差、传递力等因素而引起的齿轮传动过程的“静差”的影响效果,即轮齿误差效应;
- (3) 原动机和工作机传动性能载荷的变动率,系统阻尼等因素的影响效果,即传动效应。

由(14)式揭示了影响动载荷的诸因素(2)与实验相符。

- (1) 外部载荷及其周期性的变化;
- (2) 齿轮啮合系统的质量以及扭振和动不平衡;
- (3) 齿轮啮合系统的刚度以及轴和轴承的刚度;
- (5) 齿轮的制造精度及相对齿形误差;
- (6) 齿轮副的材料、结构尺寸以及重叠系数;
- (6) 齿轮的转速及其均匀性;
- (7) 润滑状态及齿轮系统的阻尼特性。

式(14)明确指出:一旦当齿轮付在主共振临界速度段,  $\Omega \approx 1$  ( $0.85 \leq \Omega \leq 1.15$ ) 运转时,就有可能产生极大的动载荷。当系统动态阻尼比 $\xi$ 很小时就有可能给齿轮带来严重破坏的灾难。

## 参考文献

- [I] 华东交通大学 王中庆 《齿轮传动动力学分析与研究——脱啮、撞击、动载和振动》 三机部齿贴强度规模编制组印1980.12.13
- [II] 哈尔滨市东安机械厂 胡永安 《使用系数 $K_s$ 和动载系数 $K_v$ 的分析》 三机部齿轮强度规范编制组印1980.7.20
- [III] By Eorle Buckingham Professor of Mechanical Engineering Massachusetts Institue of Technology 《Analytical Mechanics of Geazs》 1949
- [IV] By M.F.Spotts 《Mechanical Design Analysis》 1965