华东交通大学学报 1988年 第二期（总第八期）

球壳封头圆柱壳的极限荷载

胡 宗 陵

（建 工 系）

摘 要

本文讨论和研究球壳和圆柱壳组合结构承受内压时的极限荷载。结构为理想刚塑性材料，服从双矩弱作用屈服条件，壳体屈服后仍满足中面直线法假设。对给定结构塑性破坏形式，进行塑性分析和计算，得到了简便极限荷载计算公式和适用范围，所获得的解是完全解。

一 前 言

压力容器在化工、石油等工业部门广泛采用。压力容器常由球壳和圆柱壳组合而成，对于这种组合结构的极限分析，不少学者做出了贡献。一般来说，极限荷载计算可以从两种途径进行，一是用静力许可方法通过静力平衡方程、塑性条件、边界条件求得极限荷载，由极限分析定理，它总是小于或等于真实荷载；一是机动许可法，采用满足几何条件、速度边界条件的速度场，通过能量法，来求得极限荷载，它总是大于或等于真实极限荷载。对于结构真实极限荷载的计算，往往两种方法均应进行，才能估算结果精确性。这给问题的求解，带来了困难。

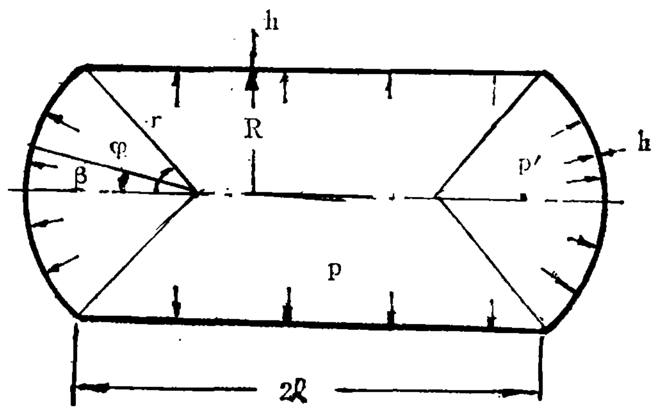


图 一

本文用静力许可方法，对球壳封头的圆柱壳（图一）承受内压时，求得静力许可场和极限荷载，再通过几何条件、速度边界条件和连续条件，求出与静力许可场相关连的速度场，并服从塑

本文于1987年7月23日收到

性流动条件，这样，所得到的解是问题的完全解。其结论，不仅适用于半球封头圆柱壳，也适用于任意球壳封头的圆柱壳，因此，可以推广到圆形抛物面扁壳为封头的圆柱壳中。

二、基本方程及符号

1、平衡微分方程

柱壳单元如图二所示，其上内力素：

N_x，N_θ——轴向和环向单位长度上的力。

M_x，M_θ——轴向和环向单位长度弯矩。

Q_x——单位长度横向剪力的。

平衡微分方程

$$\begin{aligned} &\frac{dN_x}{dx} = 0 \\ &\frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\theta}{R} = p \qquad (1) \\ &\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \end{aligned}$$

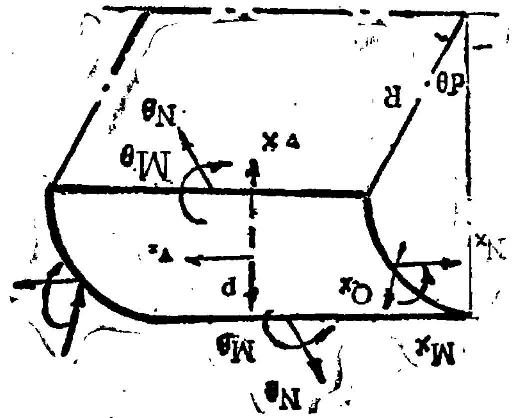


图　二

球壳单元如图三所示，其上内力素：

N_θ,N_φ——纬线和经线方向单位长度上薄膜力

M_θ,M_φ——纬线和经线方向单位长度弯矩

Q——横向剪力（单位长度）

由薄壳理论建立球壳平衡微分方程为

$$\frac{d(N_\varphi \mathrm{Sin}\varphi)}{d\varphi} - N_\theta \mathrm{Cos}\,\varphi - Q\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$$

$$N_\varphi \mathrm{Sin}\varphi + N_\theta \mathrm{Sin}\varphi + \frac{d(Q\mathrm{Sin}\varphi)}{d\varphi} - rp\,\mathrm{Sin}\varphi = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{d(M_\varphi \mathrm{Sin}\varphi)}{d\varphi} - M_\theta \mathrm{Cos}\,\varphi - rQ\mathrm{Sin}\,\varphi = 0$$

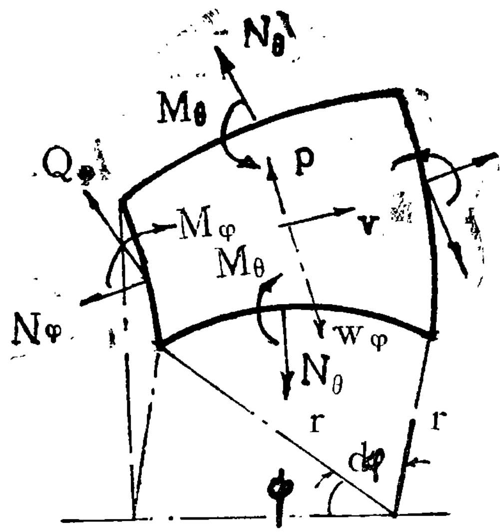


图　三

2、几何方程：

V_x,W_x——柱壳中面上一点轴向和法向速度。

V，W——球壳中面上一点经线方向和法向速度。

当壳体进入塑性状态后，中面直法线假设仍然成立，于是

柱壳的应变速度

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{W_x}{R}, \qquad \dot{\varepsilon}_x = \frac{dV_x}{dx}$$

中面主曲率变化速度

$$\dot{\chi}_\theta = 0 \qquad \dot{\chi}_x = -\frac{d^2 W_x}{dx^2} \tag{3}$$

转动角速度

$$\omega_x = \frac{-dw_x}{dx}$$

壳球中面应变速度

$$\dot{\varepsilon}_\theta = (V\,\mathrm{ctg}\,\varphi - W_\varphi)/r \qquad \dot{\varepsilon}_\varphi = \left(\frac{dV}{d\varphi} - W_\varphi\right)\Big/ r$$

中面上主曲率变化速度

$$\dot{\chi}_\theta = -\mathrm{ctg}\,\varphi\left(V + \frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)\frac{1}{r^2} \qquad \dot{\chi}_\varphi = -\frac{1}{r^2}\left(V + \frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right) \tag{4}$$

转动角速度

$$\omega_\varphi = -\left(V + \frac{dW_\varphi}{d\varphi}\right)\frac{1}{r}$$

3、连接条件

由图四知力的连接条件

$$Q|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Sin}\,\varphi_0 - N_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Cos}\,\varphi_0 = Q_x|_{x=0}$$

$$Q|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Cos}\,\varphi_0 + N_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Sin}\,\varphi_0 = N_x|_{x=0} \tag{5}$$

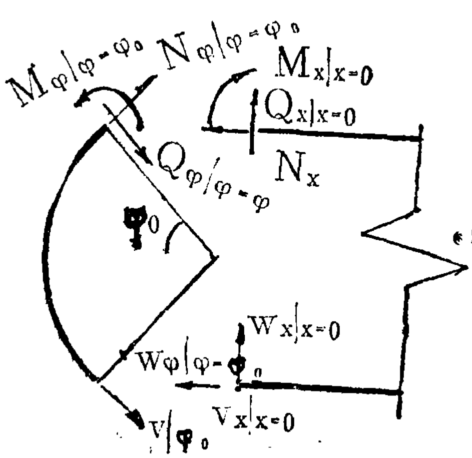
$$M_\varphi|_{\varphi=\varphi_0} = M_x|_{x=0}$$

速度连接条件

$$-V|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Cos}\,\varphi_0 + W_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Sin}\,\varphi_0 = W_x|_{x=0}$$

$$V|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Sin}\,\varphi_0 + W_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}\mathrm{Cos}\,\varphi_0 = V_x|_{x=0} \tag{6}$$

$$\omega_\varphi|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_x|_{x=0}$$



图四

4、广义应力符号

$$n_x = \frac{N_x}{N_0} \qquad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0}$$

$$m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0} \qquad m_x = \frac{M_x}{M_0}$$

$$m_\varphi = \frac{M_\varphi}{M_0} \qquad P = \frac{p}{N_0/r}$$

其中

$$N_0 = \sigma_T h$$

$$M_0=\frac{1}{4}\sigma_T h^2 \qquad \frac{N_0}{M_0}=4/h$$

σ_T——为材料屈服极限

h——为壳体的壁厚

p——容器内压

三、极限屈服面

假设：1.材料为理想刚塑性材料，服从Tresca 塑性条件和流动规律，忽略剪力对塑性条件影响。

2.材料为不可压缩。

3.结构屈服时服从双矩弱作用屈服条件，即弯矩起主要作用时，可以忽略薄膜力对材料进入塑性条件影响，而当薄膜力起主要作用时，则可忽略弯矩对材料进入塑性条件影响。

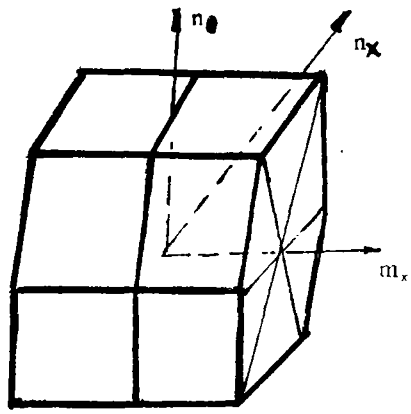


图　五

由于圆柱壳在进入塑性状态后，$\dot{\chi}_\theta=0$，因此，M_θ不做塑性功，柱壳的屈服面是一个空间曲面[1]，它可以自12个线性化平面组成，由假设3，则可进一步简化成由八个平面组成，见图五和表1。

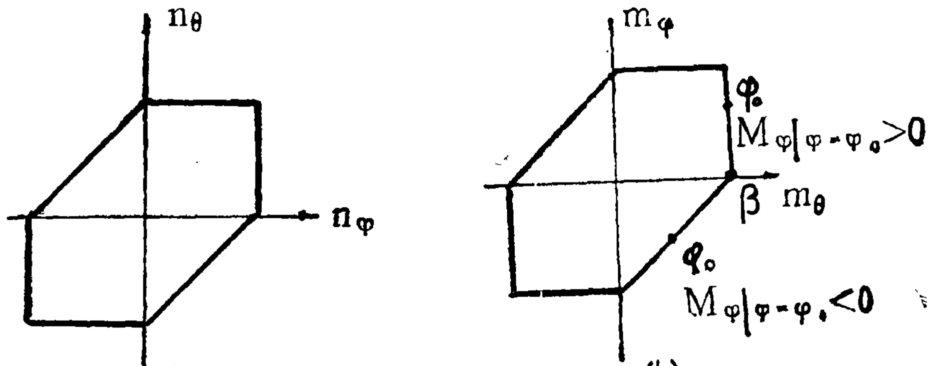
表1　圆柱壳屈服曲面

面	方　程	应变速度矢量 $\dot{\varepsilon}_\theta\dot{\varepsilon}_x\dot{\chi}_x\dot{\chi}_\theta$	面	方　程	应变速度矢量 $\dot{\varepsilon}_\theta\dot{\varepsilon}_x\dot{\chi}_x\dot{\chi}_\theta$
1	$n_\theta=1$	$\nu_1(1,0,0,0)$	5	$n_\theta-n_x=1$	$\nu_5(0,-1,0,0)$
2	$-n_\theta=1$	$\nu_2(-1,0,0,0)$	6	$-n_\theta+n_x=1$	$\nu_6(-1,1,0,0)$
3	$n_x=1$	$\nu_3(0,1,0,0)$	7	$m_x=1$	$\nu_7(0,0,1,0)$
4	$-n_x=1$	$\nu_4(0,-1,0,0)$	8	$m_x=-1$	$\nu_8(0,0,-1,0)$

对于球壳的屈服曲面是一个四维超空间曲面，它可以由线性化22个平面组成[2]，由假设3，则可以简化成由12个平面组成的超空间曲面，如表2和图六(a)、(b)。

表2　　球壳屈服曲面

面序	方　　程	应变速度矢量 $\dot{\varepsilon}_\theta\ \dot{\varepsilon}_\varphi\ \dot{\chi}_\theta\ \dot{\chi}_\varphi$	面序	方　　程	应变速度矢量 $\dot{\varepsilon}_\theta\ \dot{\varepsilon}_\varphi\ \dot{\chi}_\theta\ \dot{\chi}_\varphi$
1	$n_\theta-n_\varphi=1$	$v_1(1,-1,0,0)$	7	$m_\theta-m_\varphi=1$	$v_7(0,0,1,-1)$
2	$-n_\theta+n_\varphi=1$	$v_2(-1,1,0,0)$	8	$-m_\theta+m_\varphi=1$	$v_8(0,0,-1,1)$
3	$n_\theta=1$	$v_3(1,0,0,0)$	9	$m_\theta=1$	$v_9(0,0,1,0)$
4	$-n_\theta=1$	$v_4(-1,0,0,0)$	10	$m_\theta=-1$	$v_{10}(0,0,-1,0)$
5	$n_\varphi=1$	$v_5(0,1,0,0)$	11	$m_\varphi=1$	$v_{11}(0,0,0,1)$
6	$-n_\varphi=1$	$v_6(0,-1,0,0)$	12	$m_\varphi=-1$	$v_{12}(0,0,0,-1)$



(a)　　(b)

图　　六

四、极限荷载计算

组合结构塑性破坏形式如图七所示，它是由球壳和柱壳同时因弯曲变形而引起的。

1、屈服条件

根据壳体受力特点和弹性分析，可设结构进入塑性状态时，有

$n_\theta=1$

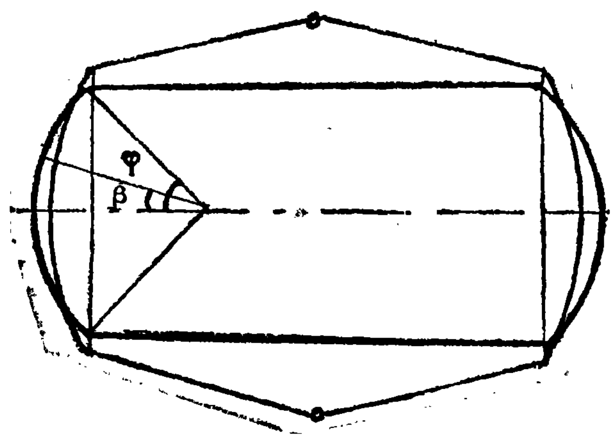
于是，在这种塑性破坏形式下，对于圆柱壳的塑性屈服条件，取

$n_\theta=1$，相应屈服面为

$v_1(1,0,0,0)$　　(7)

对于球壳屈服条件：($\beta<\varphi<\varphi_0$)

当 $M_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}<0$ 时，取



图七

$n=1$，$m=1+m_s$，相应屈服面为

$v_3(1,0,0,0)$ 和 $v_7(0,0,1,-1)$　　$(\beta<\varphi<\varphi_0)$　　(8)

当 $M_{\varphi|\varphi=\varphi_0}>0$ 时，取

$n=1$，$m_s=1$，相应屈服面为

$v_1(1,0,0,0)$ 和 $v_6(0,0,1,0)$，　　$(\beta<\varphi<\varphi_0)$　　(9)

2、边界条件

力的边界条件

$$M_{\varphi|\varphi=\beta}=0 \qquad N_{\varphi|\varphi=\beta}=0$$

$$M_{x|x=l}=-M_0 \qquad Q_{x|x=l}=0 \tag{10}$$

速度边界条件

$\omega_{x|x=l}=\omega_s$　　（铰圆处转动角速度 ω_s）

$V_{x|x=0}=0$，$W_{\varphi|\varphi=\beta}=I\operatorname{Cos}\beta$，$V_{\varphi=\beta}=I\operatorname{Sin}\beta$，（I:刚性位移）　(11)

3、静力许可场

由圆柱壳的平衡方程（1），屈服条件（7）和边界条件（10），可得

$$N_x=\frac{N_0}{2}P\operatorname{Sin}\varphi_0$$

$$Q_x=N_0\left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)\frac{x-l}{r} \tag{12}$$

$$M_x=M_0\left\{\left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)k^2\left(\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x}{l}\right)+\left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)k^2-1\right\}$$

其中 $k^2=\dfrac{2l^2}{rh}$

由球壳的平衡方程(2)，屈服条件(8)、(9)和连接条件(5)以及边界条件(10)，可以得到

$$N=N_0\left\{\left[(P-2)\frac{\varphi-\varphi_0}{2}-\frac{P}{2}\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi_0+\left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)\frac{l}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0\right]\operatorname{Ctg}\varphi+\frac{P}{2}\right\} \tag{13}$$

$$Q=N_0\left[(P-2)\frac{\varphi-\varphi_0}{2}+\frac{P}{2}\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi_0-\left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)\frac{l}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0\right]$$

并有

$$P=2\frac{\varphi_0-\beta+\frac{l}{r}}{\varphi_0-\beta+\operatorname{tg}\beta+2\frac{l}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0-\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi_0} \tag{14}$$

1）当 $M_{\varphi|\varphi=\varphi_0}<0$ 时，有

$$M_\varphi = M_0 \ln\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi_0} - \frac{4r}{h}M_0\left\{\left[(P-2)\frac{2\varphi_0-\varphi}{4} - \frac{P}{2}\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi_0 + \left(P - \frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)\frac{1}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0\right]\varphi + \left[\frac{P}{2}\operatorname{tg}\beta - \frac{\beta}{4}\left(P-2\right)\right]\right\} \tag{15}$$

式中β可由下式求得：

$$\left(\varphi_0-\beta+\frac{1}{r}\right)\frac{4r}{h}\left[\frac{(\varphi_0-\beta)^2}{2} + \operatorname{tg}\beta(\varphi_0-\beta) - 2k^2\right] - \left[\frac{2r}{h}(\varphi_0-\beta)^2 - \frac{k^2}{\operatorname{Sin}\varphi_0} - 1 - \ln\frac{\operatorname{Sin}\varphi_0}{\operatorname{Sin}\beta}\right]\left(\varphi_0-\beta+\operatorname{tg}\beta+2\frac{1}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0 - \operatorname{Cos}\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi_0\right)=0 \tag{16}$$

当球壳与圆柱壳连接处出现塑性铰圆时，由$M_x|_{x=0} = -M_0$，可得到

$$P = \frac{1}{\sin\varphi_0}$$

2）当$M_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}>0$时，则可得到

$$M_\varphi = M_0 + \frac{4r}{h}M_0\left\{\left[(P-2)\frac{\varphi_0-\varphi}{2} - \frac{P}{2}\operatorname{Cos}\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi_0 + \left(P-\frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0}\right)\right]\operatorname{ctg}\varphi + \frac{P}{2} - 1\right\} - M_0\left(1-\frac{4r}{h}\right)\frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}\varphi} \tag{17}$$

式中β可由下式确定

$$\frac{1}{r}\left[\frac{4r}{h}(\varphi_0-\beta)\operatorname{Cos}\varphi_0 - \frac{4r}{h}\operatorname{Sin}\varphi_0 + \frac{4r}{h}\operatorname{tg}\beta\operatorname{Cos}\varphi_0 - 2k^2\operatorname{Sin}\varphi_0\right] + (\varphi_0-\beta)\left[\frac{4r}{h}\operatorname{tg}\beta\operatorname{Cos}\varphi_0 - 2k^2\operatorname{Sin}\varphi_0\right] - (\varphi_0-\beta)\left[k^2+2\operatorname{Sin}\varphi_0 - \left(\frac{4r}{h}-1\right)\operatorname{Sin}\beta\right] - \left[\frac{4r}{h}(\varphi_0-\beta)\operatorname{Cos}\varphi_0 - \frac{4r}{h}\operatorname{Sin}\varphi_0 - \left(\frac{4r}{h}-1\right)\operatorname{Sin}\beta\right]\left[2\frac{1}{r}\operatorname{Sin}\varphi_0 + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{Cos}\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi_0\right] = 0 \tag{18}$$

当球壳与圆柱壳连接处出现塑性铰圆时，由$M_x|_{x=0} = M_0$，可得到

$$P = \frac{2}{k^2} + \frac{1}{\sin\varphi_0}$$

由式(14)表示的球壳封头圆柱壳的极限荷载P的静力容许范围

$$P \geqslant \frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0} \qquad P \leqslant \frac{2}{k^2} + \frac{1}{\operatorname{Sin}\varphi_0} \tag{19}$$

4、速度许可场

现求解与上述静力许可场相关连的速度场。

圆柱壳：$(0 \leqslant x \leqslant l)$

由屈服条件（7）和几何方程（3），知

$$\dot{\chi}_x = 0 \qquad \frac{d^2 w_x}{dx^2} = 0 \qquad \dot{\varepsilon}_x = 0 \qquad \frac{dv_x}{dx} = 0$$

得到

$$W_x = -(\omega_c x + w_0) \qquad V_x = V_0 \tag{20}$$

球壳：$(\beta \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0)$

当$M_\varphi|_{\varphi=\varphi_0} < 0$时

由屈服条件（8）以及几何方程（4），知

$$\dot{\varepsilon}_\varphi = 0 \qquad \dot{\chi}_\theta = 1 \qquad \dot{\chi}_\varphi = -1 \qquad \text{即}\ \dot{\chi}_\theta + \dot{\chi}_\varphi = 0$$

得到微分方程

$$\frac{dV}{d\varphi} - w_\varphi = 0 \qquad \operatorname{ctg}\varphi\left(V + \frac{dw_\varphi}{d\varphi}\right) + \frac{dV}{d\varphi} + \frac{d^2 w_\varphi}{d\varphi^2} = 0$$

求解微分方程，得

$$V = E\operatorname{Sin}\varphi + F\operatorname{Cos}\varphi + D(\operatorname{Sin}\varphi \ln\operatorname{Sin}\varphi - \varphi\operatorname{Cos}\varphi)$$

$$W_\varphi = E\operatorname{Cos}\varphi - F\operatorname{Sin}\varphi + D(\operatorname{Cos}\varphi\ln\operatorname{Sin}\varphi + \varphi\operatorname{Sin}\varphi) \tag{21}$$

由速度边界条件(11)，连接条件(6)，可确定常数

$$\begin{aligned}
&D = -r\omega_s\operatorname{Sin}\varphi_0\\
&E = r\omega_s\operatorname{Sin}\varphi_0\ln\operatorname{Sin}\varphi_0\\
&F = w_0 - r\omega_s\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi_0\\
&w_0 = r\omega_s(\varphi_0 - \beta)\operatorname{Sin}\varphi_0\\
&\omega_c = \omega_s\\
&V_0 = 0\\
&I = r\omega_s\operatorname{Sin}\varphi_0\ln\frac{\operatorname{Sin}\varphi_0}{\operatorname{Sin}\beta}
\end{aligned} \tag{22}$$

将定出常数分别代入式(20)，(21)，可得一速度场，表达式为

$$V = r\omega_s\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi\ln\frac{\operatorname{Sin}\varphi_0}{\operatorname{Sin}\varphi} + r\omega_s(\varphi - \beta)\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi$$

$$W_\varphi = r\omega_s\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Cos}\varphi\ln\frac{\operatorname{Sin}\varphi_0}{\operatorname{Sin}\varphi} - r\omega_s(\varphi - \beta)\operatorname{Sin}\varphi_0\operatorname{Sin}\varphi \tag{23}$$

相应屈服面 $\nu_1(1,0,0,0)+\nu_7(0,0,1,-1)=\left[r\omega_s(\varphi-\beta)\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi},0,0,0\right]+$

$$+\left[0,0,\frac{\omega_s}{r}\sin\varphi_0\frac{\mathrm{Ctg}\varphi}{\sin\varphi},-\frac{\omega_s}{r}\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\mathrm{Ctg}\varphi\right] \qquad (24)$$

当$M_\varphi|_{\varphi=\varphi_0}>0$

由屈服条件(9)，几何方程(4)，知

$$\dot{\chi}_\varphi=0 \qquad \dot{\varepsilon}_\varphi=0$$

由微分方程

$$\frac{d^2W_\varphi}{d\varphi^2}+\frac{dV}{d\varphi}=0 \qquad \frac{dV}{d\varphi}-W_\varphi=0 \qquad (25)$$

不难求得其解

$$V=A\sin\varphi-B\cos\varphi+C \qquad W_\varphi=A\cos\varphi+B\sin\varphi \qquad (26)$$

利用连接条件(6)，边界条件(11)，可确定常数

$$\begin{aligned}&A=r\omega_s\sin\varphi_0\\&B=-w_0-r\omega_s\sin\varphi_0\\&C=-r\omega_s\\&w_0=r\omega_s(\cos\beta-\sin\varphi_0)\\&l=r\omega_s(1-\sin\beta)\end{aligned} \qquad (27)$$

将常数代入式(26)，可得球壳速度场

$$\begin{aligned}&V=r\omega_s(\sin\varphi_0\sin\varphi+\cos\beta-\sin\varphi_0)\\&W_\varphi=r\omega_s(\sin\varphi_0\cos\varphi-\cos\beta\sin\varphi) \qquad (\beta<\varphi<\varphi_0)\end{aligned} \qquad (28)$$

将式(27)常数代入式(20)，可得圆柱壳速度场

$$\begin{aligned}&W_x=-\left[\omega_s x+r\omega_s(\cos\beta-\sin\varphi_0)\right] \qquad (0\leqslant x\leqslant l)\\&V_x=0\end{aligned} \qquad (29)$$

式(29)相应的屈服面

$$\nu_1=(1,0,0,0)=\left\{\omega_s\left[-\frac{x}{R}+\frac{r}{R}(\cos\beta-\sin\varphi_0)\right],0,0,0\right\} \qquad (30)$$

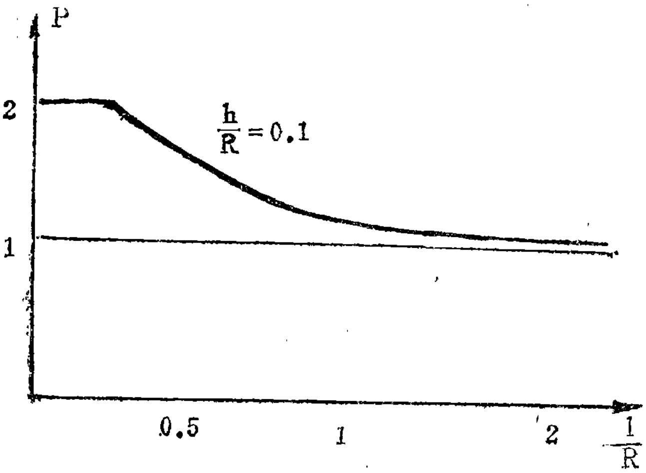
式(28)相应的屈服面

$$\nu_1(1,0,0,0)+\nu_8(0,0,1,0)=\left[\left(\frac{\cos\beta}{\sin\varphi}-1\right)\omega_s,0,0,0\right]+\nu_8\left(0,0,\frac{\mathrm{ctg}\varphi}{r}\omega_s,0\right)$$

五、结　束　语

本文所得到的静力许可场和与此相关连的速度场，完全满足平衡方程、几何方程、屈服条件和边界条件以及连接条件，根据极限分析定理，所得到的解是完全解。

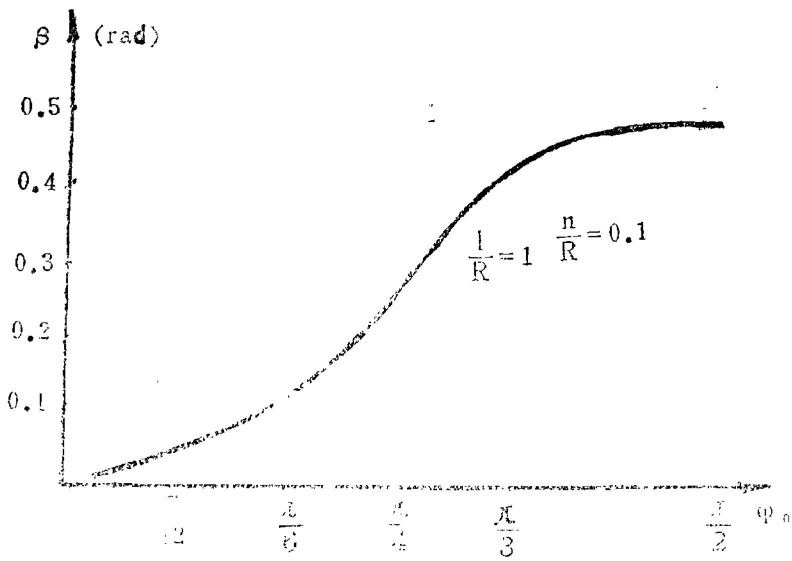
由图八看出，半球壳封头圆柱壳的极限荷载P与$\frac{1}{R}$之间关系，随$\frac{1}{R}$比值增加极限荷载减小



图八　P—$\frac{1}{R}$关系

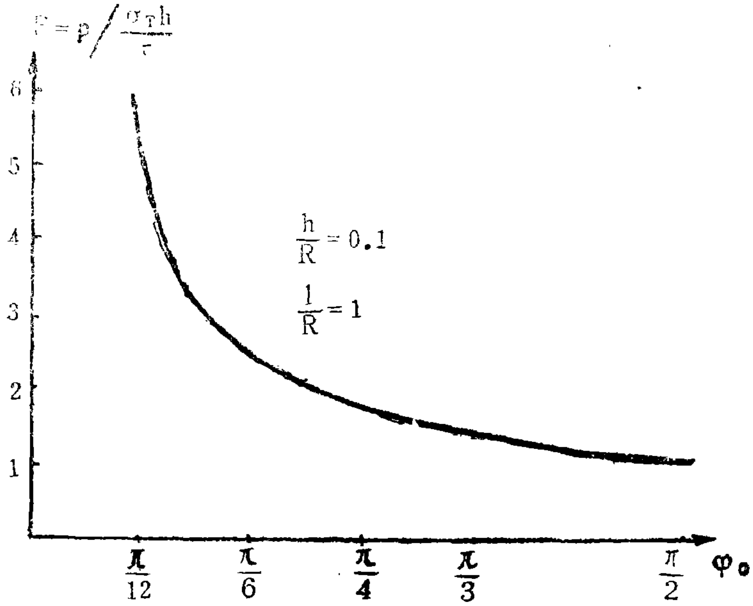
而趋于1，与参考文献〔3〕所得到的结论基本一致。

图九给出了β与球壳球心角φ_0之间关系，β随φ_0减小而趋于零。球壳愈扁平（φ_0愈小），球壳受弯矩影响愈大。



图九　β～φ_0间关系

图十给出极限荷载P与φ_0间关系。P随φ_0减小而增大，原因是球壳愈扁平，其半径愈大，而使P增大。只需将r换算成柱壳半径R，就可得一小值。当φ_0较小时（$\varphi_0 \leqslant 15°$），根据薄壳理论圆形抛物面扁壳两个主曲率可近似视为相等，因此，上述结果可以用于圆形抛物面扁壳为封头圆柱壳中，使处理问题范围更广泛。



图十 P～φ_0关系

参　考　文　献

[1] Hodge, P. G. Jr"The rigid—Plastic analysis of symmethically loaded cylindrical shells"J. Appl. Mech 21 336—342(1954)

[2] Onat. E. T.Prager W. Limit analysis of shells of revolution Koninkl. Nederl,Akad. Wet. proc(B) 57. 534—548(1954)

[3] 程莉、徐秉业　球壳与柱壳组合结构等强度的塑性分析　清华大学学报 Vol24. №4 1984.

[4] 徐秉业、刘信声　结构塑性极限分析　中国建筑工业出版社　1985

[5] 李康先　壳体极限承载能力　上海交通大学科学研究处编印。1963. 4.