

钢筋混凝土有限元模型的研究

雷 晓 燕

(建筑工程系)

摘 要

本文建立了一种用于分析三维钢筋混凝土结构的钢筋混凝土实体等参元,在这种单元中,钢筋是直接包含在混凝土中作为整体来考虑的,因此用这种单元作为有限元模型具有节点数少、离散化方便,而又具有精度高和能反映钢筋作用的优点。通过用本文编制的程序计算及与理论解和其它数值解的比较,证实了这种单元的有效性。

关键词: 钢筋混凝土; 有限元

0 引言

钢筋混凝土结构是土木工程中最常见的结构,它广泛应用于房屋建筑、桥梁、隧道、地下基础及海洋工程中。目前对钢筋混凝土结构进行力学分析的较有效的方法是有限单元法,但从以往发表的文献看,大部分作者或是把钢筋看作独立的离散杆单元^[2,3],或是采用换算截面的方法将钢筋的作用折算到混凝土单元中^[4]。在把钢筋看作离散杆单元的模型中,单元数和节点数大量增加,导致计算机容量和计算费用的增加,这将是很不经济的;在采用换算截面的模型中,它具有计算精度低和反映不出钢筋效应的缺点,因此以上两种方法都没有很好地解决钢筋混凝土的结构计算问题。文献[1]提出了用于混凝土结构分析的一种新的八节点实体单元,该文的作者把钢筋看作八节点平行六面体混凝土单元的一部分,将钢筋的刚度迭加到混凝土的刚度中,形成了钢筋混凝土单元的刚度矩阵。但文献[1]的讨论仅限于平行六面体单元,在实际工程中,有各种各样形状的构筑物,仅用平行六面体单元只能解决一些规则建筑物的结构计算,而且文献[1]的方法规定了钢筋的布置必须与单元平面平行,因此该文有很大的局限性。本文在文献[1]的基础上,发展了一种用于钢筋混凝土结构分析的八——二十变节点钢筋混凝土等参元,这种单元具有一般性,且钢筋的排列不受限制,因此,采用这种单元作为有限元模型具有节点数少、离散化方便,保证精度和能反映钢筋效应的优点。通过用本文编制的程序计算及与理论解和其它数值解的比较,证实了这种单元的可靠性。

本文于1991年11月22日收到

1 基本假设与有限元方程

1.1 基本假设

假设混凝土在出现裂纹以前相当于线弹性均质体, 并且在混凝土和钢筋之间有牢固的粘结力, 后一个假设保证了钢筋和混凝土的变形是一致的, 从而对两种结构都可以采用相同的形状函数。

1.2 有限元方程

钢筋混凝土单元的总位能泛函可以表示成

$$\Pi = U_c + U_s + W \quad (1)$$

式中: U_c 为混凝土应变能; U_s 为钢筋应变能; W 为外荷载位能。

引入位移插值函数 $\underline{N}$, 则(1)式可写成

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \underline{a}^T \left(\int_{\Omega_c} \underline{B}^T \underline{D}_c \underline{B} d\Omega + \int_{\Omega_s} \underline{B}^T \underline{D}_s \underline{B} d\Omega \right) \underline{a} \\ & - \underline{a}^T \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{q} d\Omega - \underline{a}^T \int_{\Gamma_o} \underline{N}^T \underline{p} d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\underline{a}$ 为钢筋混凝土单元的节点位移向量;

$\underline{B}$ 为位移—应变矩阵;

$\underline{D}_c$ 为混凝土的弹性矩阵;

$\underline{D}_s$ 为钢筋的弹性矩阵;

$\underline{q}$ 、 $\underline{p}$ 分别为体力向量和面力向量。

对(2)式变分, 即可得到钢筋混凝土单元的有限元方程

$$(\underline{K}_c + \underline{K}_s) \underline{a} = \underline{Q} \quad (3)$$

其中: $\underline{K}_c$ 为混凝土的刚度矩阵, 由下式给出

$$\underline{K}_c = \int_{\Omega_c} \underline{B}^T \underline{D}_c \underline{B} d\Omega \quad (4)$$

$\underline{K}_s$ 为钢筋的刚度矩阵, 由下式给出

$$\underline{K}_s = \int_{\Omega_s} \underline{B}^T \underline{D}_s \underline{B} d\Omega \quad (5)$$

$\underline{Q}$ 为等效节点力荷载向量, 由下式给出

$$\underline{Q} = \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{q} d\Omega + \int_{\Gamma_o} \underline{N}^T \underline{p} d\Gamma \quad (6)$$

2 钢筋混凝土单元的刚度矩阵

2.1 混凝土的刚度与弹性矩阵

混凝土单元的刚度由下式给出

$$\underline{K}_c = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D}_c \underline{B} |J_c| d\xi d\eta d\zeta \quad (7)$$

式中: $|J_c|$ 为 Jacobi 行列式。

混凝土的弹性矩阵为

$$\underline{D}_c = \frac{E_c}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

对称

式中: E_c 和 μ 分别为混凝土的弹性模量和泊松比。

2.2 钢筋的刚度

钢筋在实体单元内的方向可以是任意的, 不失一般性, 假设钢筋在单元中的排列如图 1 所示, 钢筋的位置由三个节点的坐标确定, 钢筋的刚度方程是

$$\underline{K}_s = \int_{\Omega_s} \underline{B}^T \underline{D}_s \underline{B} d\Omega \quad (9)$$

采用自然坐标, 如图 1(c) 所示, 则上式可以写成

$$\underline{K}_s = A_s \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D}_s \underline{B} |J_s| d\eta \quad (10)$$

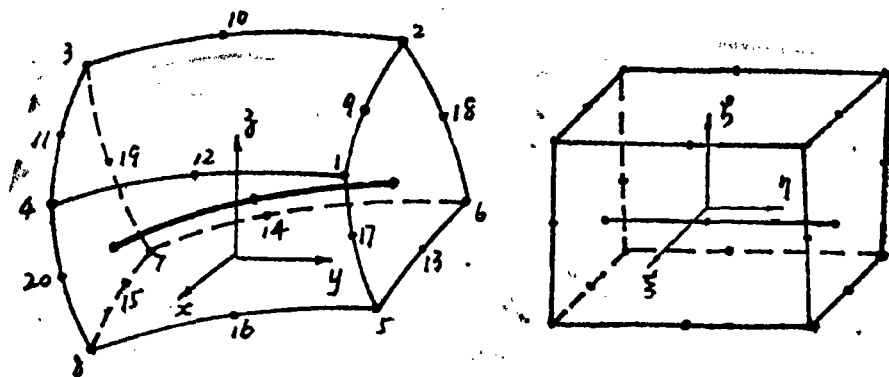
上式中, A_s 为钢筋的横截面面积, 计算矩阵 $\underline{B}$ 时, 用定义实体单元的形状函数及其导数, 因为根据假设混凝土和钢筋的变形是协调的。

计算 $|J_s|$ 时, 用定义钢筋单元的形状函数及其导数, 由于线积分是沿钢筋进行的, 因此, $|J_s|$ 为

$$|J_s| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} \quad (11)$$

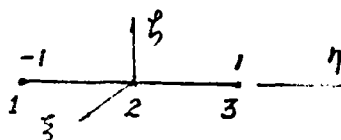
其中:

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \quad (x, y, z \text{ 轮换}) \quad (12)$$



(a) 整体坐标系中的单元

(b) 自然坐标系中的单元



(c) 自然坐标系中的钢筋单元

图 1

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2}(\eta - 1)\eta, N_2 = 1 - \eta^2, N_3 = \frac{1}{2}(\eta + 1)\eta \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \eta - \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -2\eta, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \eta + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (13)$$

刚度矩阵(10)式是用数值积分计算的,本文采用GAUSS积分方案,为便于积分,需把高斯点处的整体坐标转换为自然坐标。

设高斯点处的整体坐标为 x_G, y_G, z_G ,在自然坐标系中对应的坐标为 ξ_G, η_G, ζ_G ,对于图1所示的情况,由于 η 是沿钢筋的切线方向如图1(c),当采用高斯积分方案时, η_G 是已知的,由此可求得 x_G, z_G ,即

$$\begin{cases} x_G = \sum_{i=1}^3 N_i(\eta_G) x_i \\ z_G = \sum_{i=1}^3 N_i(\eta_G) z_i \end{cases} \quad (14)$$

对应的 ξ_G, ζ_G 可近似按下式计算

$$\begin{cases} \xi_G = \frac{1}{a} (x_G - x_C) \\ \zeta_G = \frac{1}{c} (z_G - z_C) \end{cases} \quad (15)$$

式中: a , c 分别为实体单元沿 x , z 方向平均长度的一半, x_C , z_C 为实体单元形心的坐标其值为 (参见图 1 (a))

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8} \left| (x_1 + x_4 + x_5 + x_8) - (x_2 + x_3 + x_6 + x_7) \right| \\ c = \frac{1}{8} \left| (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) - (z_5 + z_6 + z_7 + z_8) \right| \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{8} \left[(x_1 + x_4 + x_5 + x_8) + (x_2 + x_3 + x_6 + x_7) \right] \\ z_C = \frac{1}{8} \left[(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + (z_5 + z_6 + z_7 + z_8) \right] \end{cases} \quad (17)$$

(10) 式代表的是一根钢筋的刚度, 如果单元包含 n 根钢筋, 则有

$$\underline{K}_s = \sum_{i=1}^n (\underline{K}_s)_i \quad (18)$$

式中

$$(\underline{K}_s)_i = (\underline{A}_s)_i \int_{-1}^1 \underline{B}^T \underline{D}_s \underline{B} |J_s| d\eta \quad (19)$$

3 钢筋在整体坐标系中的弹性矩阵 $\underline{D}_s$

沿钢筋的切线方向, 建立局部坐标系 x' , y' , z' , 其中 x' 同钢筋的切线方向一致, 如图 2, x' , y' , z' 相对于整体坐标系 x , y , z 轴的方向余弦分别为 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ 。

钢筋在局部坐标系中的应力—应变关系由下式给出

$$\underline{\sigma}' = \underline{D}_s' \underline{\varepsilon}' \quad (20)$$

或

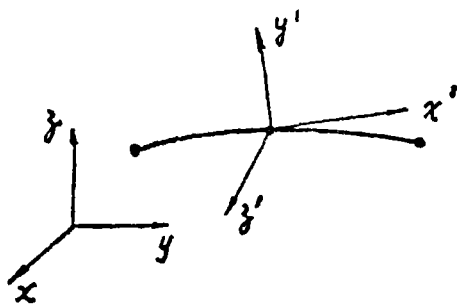


图 2

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \sigma_z' \\ \tau_{xy}' \\ \tau_{yz}' \\ \tau_{zx}' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对称} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \varepsilon_z' \\ \gamma_{xy}' \\ \gamma_{yz}' \\ \gamma_{zx}' \end{Bmatrix} = \underline{D}_s' \underline{\varepsilon}' \quad (21)$$

其中: E_s 为钢筋的弹性模量

局部坐标系和整体坐标系表示的应变之间的关系可以表示成

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{T}_\varepsilon \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma}' = \underline{T}_\sigma \underline{\sigma} \quad (22)$$

其中: $\underline{\varepsilon}'$, $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}'$ 及 $\underline{\sigma}$ 分别为局部坐标系和整体坐标系中的应变向量和应力向量; $\underline{T}_\varepsilon$ 为应变转换矩阵; $\underline{T}_\sigma$ 为应力转换矩阵, 其值为

$$\underline{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & l_1 m_2 & m_1 n_2 & n_1 l_2 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & l_2 m_3 & m_2 n_3 & n_2 l_3 \\ l_3 l_1 & m_3 m_1 & n_3 n_1 & l_3 m_1 & m_3 n_1 & n_3 l_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\underline{T}_\sigma = \begin{pmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & 2l_1 m_1 & 2m_1 n_1 & 2n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & 2l_2 m_2 & 2m_2 n_2 & 2n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & 2l_3 m_3 & 2m_3 n_3 & 2n_3 l_3 \\ l_1 l_2 & m_1 m_2 & n_1 n_2 & 2l_1 m_2 & 2m_1 n_2 & 2n_1 l_2 \\ l_2 l_3 & m_2 m_3 & n_2 n_3 & 2l_2 m_3 & 2m_2 n_3 & 2n_2 l_3 \\ l_3 l_1 & m_3 m_1 & n_3 n_1 & 2l_3 m_1 & 2m_3 n_1 & 2n_3 l_1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

容易验证有下列关系式

$$\underline{T}_\sigma^{-1} = \underline{T}_\varepsilon^T, \quad \underline{T}_\varepsilon^{-1} = \underline{T}_\sigma^T \quad (25)$$

由此得

$$\underline{\sigma} = \underline{T}_\sigma^{-1} \underline{\sigma}' = \underline{T}_\varepsilon^T \underline{\sigma}' \quad (26)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{T}_\varepsilon^{-1} \underline{\varepsilon}' = \underline{T}_\sigma^T \underline{\varepsilon}' \quad (27)$$

从(24), (22)两式, 得到

$$\underline{\sigma} = \underline{T}_e^T \underline{\sigma}' = \underline{T}_e^T \underline{D}_s' \underline{\varepsilon}' = \underline{T}_e^T \underline{D}_s' \underline{T}_e \underline{\varepsilon} = \underline{D}_s \underline{\varepsilon} \quad (28)$$

$$\text{其中: } \underline{D}_s = \underline{T}_e^T \underline{D}_s' \underline{T}_e \quad (29)$$

其显式为

$$\underline{L}_s = \underline{E}_s \left(\begin{array}{cccccc} l_1^4 & l_1^2 m_1^2 & l_1^2 n_1^2 & l_1^3 m_1 & l_1^2 m_1 n_1 & l_1^3 n_1 \\ & m_1^4 & m_1^2 n_1^2 & l_1 m_1^3 & m_1^3 n_1 & l_1 m_1^2 n_1 \\ & & n_1^4 & l_1 m_1 n_1^2 & m_1 n_1^3 & l_1 n_1^3 \\ & & & l_1^2 m_1^2 & l_1 m_1^2 n_1 & l_1^2 m_1 n_1 \\ & \text{对称} & & & m_1^2 n_1^2 & l_1 m_1 n_1^2 \\ & & & & & l_1^2 n_1^2 \end{array} \right) \quad (30)$$

钢筋在任一点的切线方向与整体坐标 x, y, z 轴的方向余弦 l_1, m_1, n_1 , 可由下式计算

$$l_1 = \frac{1}{|J_s|} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad m_1 = \frac{1}{|J_s|} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad n_1 = \frac{1}{|J_s|} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (31)$$

其中: $|J_s|$ 按(11)式计算, $\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$ 按(12)式计算。

在实际计算中, (19)式通常是用数值积分计算的, 也即

$$(\underline{K}_s)_i = (\underline{A}_s)_i \sum_{j=1}^G \left\{ \underline{B}^T(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \underline{D}_s(\eta_j) \underline{B}(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \cdot \right. \\ \left. |J_s(\eta_j)| H(\eta_j) \right\} \quad (32)$$

其中: $H(\eta_j)$ 为高斯点处的加权系数; G 为高斯点总数。

4 应力的计算

求解有限元方程(3), 可得到钢筋混凝土单元的节点位移, 有了节点位移, 即可分别求出混凝土和钢筋内各高斯点的应力。

4.1 混凝土的应力

混凝土的应力可由下式求得

$$\underline{\sigma}_c = \underline{D}_c \underline{B} \underline{a} \quad (33)$$

4.2 钢筋中的应力

钢筋中的应力可由下式求得

$$\underline{\sigma}_s = \underline{D}_s \underline{B} \underline{a} \quad (34)$$

5 数值算例

对以上介绍的钢筋混凝土有限元模型,我们编制了计算程序,并对三个工程中的实例进行了计算。

5.1 均匀拉伸的钢筋混凝土柱

结构的几何尺寸和受力情况如图3所示,混凝土柱中对称布置了两根直径为 $\phi = 20\text{mm}$ 的钢筋,钢筋的弹性模量为 $E_s = 21000\text{MPa}$,混凝土的弹性模量为 $E_c = 3500\text{MPa}$,泊松比为 $\nu_c = 0.17$,钢筋混凝土柱的一端作用有 $P = 10\text{MPa}$ 的均匀拉力,钢筋混凝土柱分成 5 个单元,68 个节点,有限元计算结果与理论解的比较见表 1。

(图中单位: cm)

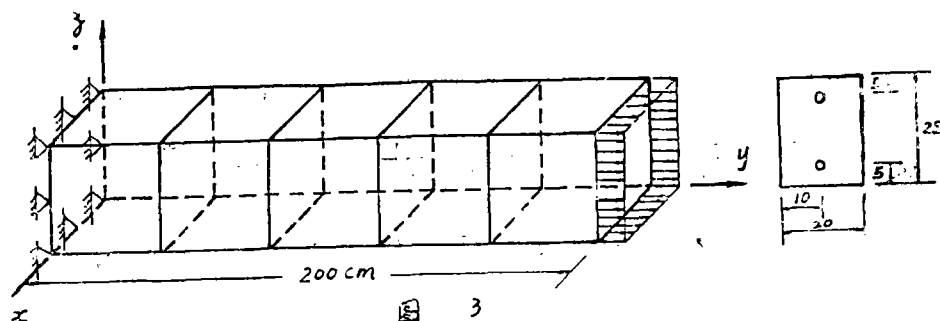


表 1

单元号	单元形心处混凝土应力		钢筋中点处应力		最大轴向位移	
	本文解	理论解	本文解	理论解	本文解	理论解
1	9.299	9.299	55.793	55.794	0.531	0.531
2	9.300	9.299	55.798	55.794		
3	9.297	9.299	55.778	55.794		
4	9.307	9.299	55.860	55.794		
5	9.272	9.299	55.549	55.794		

注:表中应力的单位为MPa;位移的单位为cm。

5.2 受纯弯矩作用的钢筋混凝土悬臂梁

结构的几何尺寸和受力情况如图4所示,在混凝土的受拉区布置了两根直径为 $\phi = 20\text{mm}$

的钢筋，钢筋的弹性模量为 $E_s=21000\text{MPa}$ ，混凝土的弹性模量为 $E_c=2100\text{MPa}$ ，泊松比为 $\nu=0.17$ ，梁的一端作用有成线性分布的荷载，其最大值为 10KN/m 。悬臂梁被离散成5个单元，68个节点，本文计算结果与文献[1]计算结果的比较见表2。

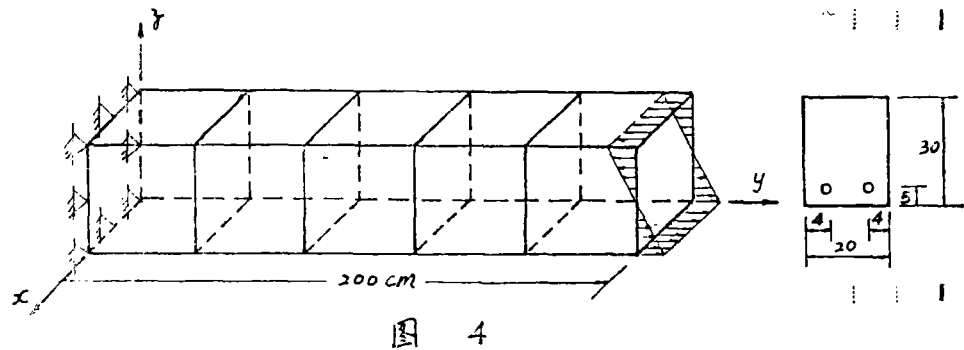


表 2

单元号	单元形心处混凝土应力		钢筋中点处应力		最大垂直挠度	
	本文解	文献[1]解	本文解	文献[1]解	本文解	文献[1]解
1	-0.546	-0.581	53.01	55.42	0.563	0.588
2	-0.565	-0.585	53.89	55.81		
3	-0.560	-0.584	53.60	55.72		
4	-0.568	-0.584	53.65	55.72		
5	-0.545	-0.584	53.52	55.72		

5.3 受均匀内压作用的钢筋混凝土厚壁圆筒

结构的几何尺寸及受力情况如图5所示，混凝土圆筒的内侧布置有四根直径为 $\phi=20\text{mm}$ 的钢筋以承受拉应力，钢筋的弹性模量为 $E_s=21000\text{MPa}$ ，混凝土的弹性模量为 $E_c=3500\text{MPa}$ ，泊松比为 $\nu=0.17$ 。在圆筒的内侧作用有集度为 $P=5\text{MPa}$ 的均匀压力。由于结构和荷载的对称性，只需取四分之一的部分作为计算模型，圆筒被离散成8个单元，72个节点。通过计算，得到了钢筋处的拉应力为 $\sigma_s=36.45\text{MPa}$ ，混凝土中径向应力 σ_r 和环向应力 σ_θ 随半径 r 的变化见图6。

从上述计算可以看出，本文所建立的钢筋混凝土单元的有限元模型具有降低节点数、单元离散容易，保证精度和能反映钢筋处的应力状态的优点，这种模型为钢筋混凝土结构的三维

应力分析提供了一个有价值的分析方法。

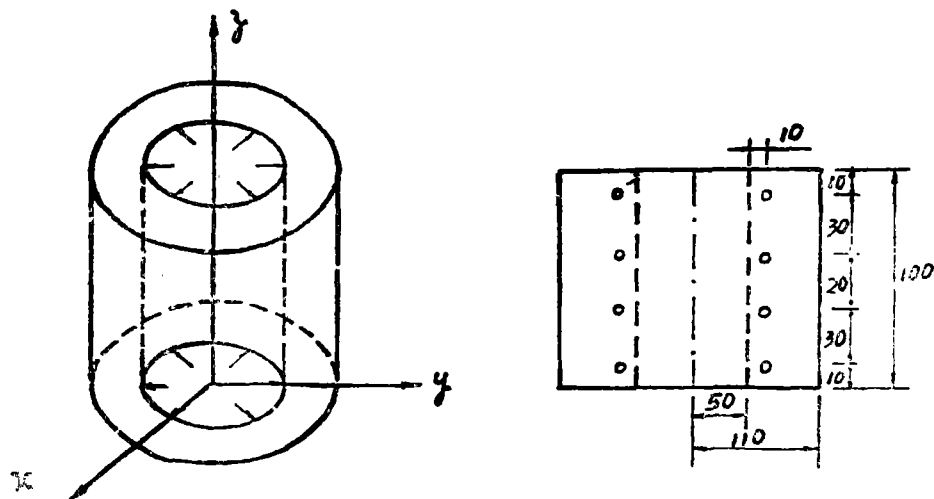


图 5

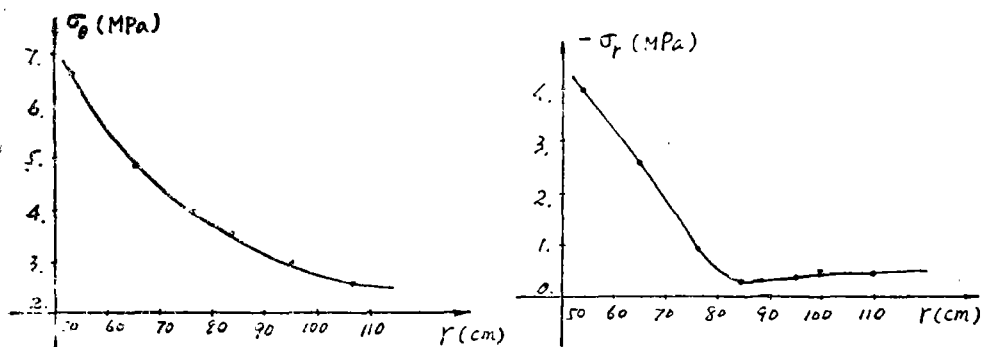


图 6

参 考 文 献

- [1] C.S.Krishnamoorthy, and M.Inhasakaram. 见第三次SAP用户讨论会会议录: 用于混凝土结构分析的一种新的八节点实体单元, 北京: 五机部二〇一研究所印, 1981:3
- [2] Hgo, D., and Scordelis, A.C., Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, American Concrete Institute Journal, Vol. 64, No.3, 1967
- [3] Valliappan, S., and Doolan, T.F., Nonlinear stress Analysis of Reinforced Concrete, Journal of Structures Division, ASCE, Vol.98, No.ST4, 1972
- [4] Suidan, M., and Schnobrich, W.C., Finite Element Analysis of Reinforced Concrete, Journal of Structures Division, ASCE, Vol.99, No.ST10, 1973
- [5] Hinton, E, and Owen, D.R.J., Finite Element Programming, Academic Press, London, 1977
- [6] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1977

Research on Finite Element Model of Reinforced Concrete

Lei Xiaoyan

Abstract

In the paper, a isoparametric quadrilateral solid element used for analyzing three dimensional reinforced concrete structure has been established, in which steel is considered to be directly involved in concrete element. Taking the element as finite element model has the advantages of reducing number of nodes, simplifying discretization, improving accuracy and being able to reflect effect of the steel. By passing programm calculation and being compared with theoretical and other numerical solutions, it is verified the effectiveness of the element.

key words: Reinforced Concrete; Finite Element