

数学化、公理化和形式化

吴 丹 怀

(南昌市化工技校)

摘 要

本文从区分非方法性学科和方法性学科入手,一方面狭义地分析了数学化、公理化和形式化的基本功能和目标,从而得出结论:按上述顺序,这“三化”形成了由低到高的三个层次,对它们的逻辑要求依次提高,使用限制依次严格。另一方面,从广义上综合,“三化”又同属方法性学科范畴,它们语言相通,推理的逻辑基础相同,因而在应用中互相渗透,交融璧合。最后简述了“三化”产生和发展的历史,指出它们是一脉相承的,公理化和形式化实际上也是广义的数学化。

关键词: 数学化; 公理化; 形式化; 数学方法; 公理方法; 形式方法; 方法性学科

数学化、公理化和形式化,以下简称为“三化”,是在数学方法论这一领域内经常遇到的三个概念,它们分别是对数学方法、公理方法和形式方法在应用时的别称和结果。所以,讨论数学化也就是讨论数学方法及其应用,等等。

为便于讨论,首先应对非方法性学科和方法性学科有一个基本认识。前者以客观规律为研究对象,如各门自然科学、技术科学及社会科学;后者以研究客观规律的方法为研究对象,如逻辑学、数学,以及近代兴起的系统论、控制论、信息论等等。对非方法性学科而言,研究客观规律固然需要一定的形式结构,但整个研究过程都不能脱离所研究的具体内容。例如研究力学,对力、质量、加速度等概念,先应有具体明确的定义,然后才能讨论它们之间的关系。但是,许多具体内容迥然不同的客观现象,却可能有相同的形式结构和处理方法,由此,建立起方法性学科来纯粹研究这些形式和方法,就不仅成为可能,而且十分必要。这是因为,第一,方法性学科可以运用简洁统一的形式语言(符号、公式等)进行研究,方便而又精确;第二,只有把形式和内容分开,暂时舍弃各种具体内容而专门研究形式,才能使方法性学科获得独立发展和走在应用前面的能力,最终促使非方法性学科更快地发展。例如,“一个变量随时间而变的变化率与该变量本身成正比”这种规律,在放射性元素衰变、物体冷却、电容器放电、人口增长等许多客观现象中都存在,在数学中统一地用微分

本文于1991年3月6日收到

方程 $\frac{dx}{dt} = -kx$ 表示, 求出其解 $x = c_0 e^{-k(t-t_0)}$ 后, 就可用它分别解决各个实际问题。

“三化”的概念显然都属于方法性学科范畴。若狭义地分析, 它们存在原则性区别, 分属不同的方法层次; 若广义地综合, 它们又互相渗透, 融为一体。

1 “三化”功能不同, 目标各异, 显出层次性

我们先分别狭义地从“三化”的通常含义、语言工具、论证手段和检验方式等方面分析它们的基本功能和目标, 从而考察它们的层次区别。

1.1 数学化和数学方法

通常所说的数学化, 就是用数学语言对研究对象进行量的表述, 并用数学运算或其他数学推证方法进行计算和论证, 其目标在于得出刻画对象本质特点和变化规律的定量化结论。

数学语言通常有数字、符号、公式、方程、图表等等, 它们都直接或间接地反映了对象的数量特征。当然, 数学语言一般还需与所研究学科的专业术语及自然语言结合使用, 才能执行数学化的使命。

数学论证手段, 首先有各种数值计算方法, 其次还有大量非数值计算的逻辑推证。例如, 描述力学或电磁学中振动现象的许多微分方程都难以计算求解, 却能根据微分方程定性理论, 对解所表示的运动过程的趋势(如稳定性), 或所有可能的运动状态(在几何上表示为积分曲线的全局分布)作出准确判断。数学化的主要途径, 是针对所研究的实际问题提炼出数学模型(例如微分方程就是一类常用的数学模型), 它们鲜明地刻画了研究对象中各因素的数量特征及其关系, 通过对模型的求解或分析得到结论, 并反演回实际问题中去。

数学化的基本功能是使研究定量化, 即使是没有具体计算的定性分析, 由于仍是采用简洁的数学语言严密推证, 故也呈现出定量化特征, 而与只用自然语言分析不同。数学方法应用极广, 实例俯拾皆是, 不仅应用于非方法性学科, 也应用于方法性学科, 因为这两类学科都具有许多数量特征。毋庸多说, 数学化的正确与否, 必须经受客观实践的检验。

1.2 公理化和公理方法

通常说的公理化, 首先是指所谓实体公理化, 或称为非形式公理化, 这是当一门学科已积累了丰富的研究成果之后, 对它进行全面整理、重建和提高的理论方法。具体来说, 公理方法就是从一组不加解释(多为不释自明)的初始概念, 和一组不加证明(多为不证自明)的初始命题——公理出发, 按给定的推理规则, 重新定义出其他各个概念, 推证出其他各个命题——定理, 从而把该学科的主要成果, 重新整理成有严密逻辑结构的演绎系统, 即公理系统。初始概念、公理组及推理规则是公理系统的基本组成部分, 不同的公理系统其推理规则大都相同, 所以, 决定一个公理系统的关键是确定一组初始概念和一组公理。

实体公理化仍使用所研究学科的专业术语和自然语言, 以它们为主要表述工具, 同时使用一些数学语言及其他符号语言, 这就使读者在推理时既能熟悉具体的研究对象, 又能得到形式论证的要领。所以, 对不能脱离具体内容进行研究的非方法性学科, 实体公理化是行之有效的必要方法; 当然, 它也经常用于方法性学科的初等公理化。在科学发展史上, 诸如牛顿从若干基本概念和三个基本定律出发, 推证出经典力学的全部结果, 欧几里德对几何学进

行公理化重建^{*}，就分别是两类学科公理化的典型例子。

实体公理化的推理规则主要是演绎法，这是一种必然性推理方法，在逻辑上极为可靠。而且，演绎法已形成一套固定的逻辑格式，使用很方便。所以，实体公理化也是一类关于推理过程规范化的方法：从公理出发的证明是十分严格的，即只能以公理为依据，遵循已明确规定的推理规则进行，绝不能在证明过程中附加其他前提或运用其他规则。

实体公理化的基本功能是对所研究的学科进行逻辑重建，演绎地展开理论的全部内容。其目标在于：“提供对‘科学理论的静态说明’，而且仅仅是为了一个特定时期的特定理论提供一幅清晰准确的图画。”（引自[2]）但在整理已有成果的同时，利用公理方法还可能定义出新概念，推导出新定理，从而对已有理论进行必要的补充、完善和扩展。并且，利用公理方法不仅能重建已有的学科，还对创建新学科有重要作用，这一般可通过改变初始概念或公理组内容的方式进行；最著名的例子是：通过改变欧氏几何公理系统中的平行公理而创建非欧几何学。这种理论诞生于逻辑思维，但以前也必须得到实践验证才能真正确立。

然而，不论是重建或创建的公理化学科系统，首先都应得到理论上的认可。特别对方法性学科，判断其公理系统是否正确完善，首先必须验证该系统是否符合相容性、独立性和完备性这三条逻辑准则。相容性是指由该系统不会推出两个互相矛盾的结果；独立性是指该系统的任一初始概念都不可由其他概念或命题定义出，任一公理也不可由它们推导出，否则就没有必要把它们作为初始概念或公理；完备性则指出：对一个已经能完美地展示学科现有全部内容的公理系统，不能删除、增加或更换其任何初始概念和公理，否则，如上述几何学的例子那样，该公理系统可能变成另一套理论的公理系统（但当该学科有重大发展，现有的公理系统已不适用，作这类改变就有必要）。要严格证明（如下所述，但不可能彻底证明）一个公理系统是否符合这三条准则，必须运用形式化方法。对非方法性学科来说，检验其实体公理化结论是否适用，直接的办法一般仍然是：考察其公理系统是否完美无误地展示了这门学科的全部内容，是否精辟清晰地刻画出了其间的逻辑关系。

1.3 形式化和形式方法

根据本文开头的分析，广义地说，一切方法性学科的应用都是形式化。但通常所说的形式化，是较狭义地理解时，它实际上是公理化的高级形态，主要指数逻辑方法，这是完全采用符号语言，把推理过程演算化的公理方法。它有两个基本特点：

第一，严格实行一词一义。这个“义”不是指针对某个具体对象的内容，而是指符号或公式所代表的逻辑意义，对每一个符号或公式，其逻辑意义应唯一地清晰地确定，不容任何含糊。这样，才能在演算过程中，抽掉概念或命题（即符号或公式）原有的具体内容，只研究其间的逻辑关系与结构。运用形式方法建立公理系统时，要把初始概念、公理和推理规则分别代之以作为逻辑演算起点的初始符号、初始公式和公式变形（即演算）规则，这就是把实体公理系统进一步抽象成为脱离具体内容的形式公理系统，简称形式系统。

^{*}后来，希尔伯特又在其名著《几何基础》中对欧氏几何公理系统再次重建，这次重建他虽仍使用几何语言进行表述和论证，但这种表述和论证还可以在几何学以外的代数等域内找到其运用对象，因而它实际上已是一种初级的形式公理系统。

第二，把推理过程完全代换为由符号和公式组成的演算序列，演算的最终结果就是推理的结论，从而就把推理的有效性转化为演算的正确性问题。例如，命题演算的目标是把永真式（即重言式）组成公理系统：在演算中，简单命题变项的取值只有“真”或“假”两种，这取决于它们是否符合客观具体情况；在此前提下，由这些变项及常项组成复合命题公式并进行演算，若对各变项的任何一组取值，复合命题公式都取“真”值，则称之为永真式。又如，在进行电路分析时，利用命题演算中的优析取范式原理，可以迅速完成诸如多个开关控制一个电器等各类复杂电路的设计，利用命题公式的等价关系又可准确地简化一个复杂电路；若不用这些演算方法而直接进行设计或简化，是极为困难的。

然而，特别在数学领域内，形式化的功能不只是使推理简单明确，亦即其目标不只是象实体公理化那样，只能对一门学科作较一般的逻辑重构和展开，一个形式系统可以有多个不同的适用对象，而主要在于论证这门学科作为一个逻辑系统的可靠性，即推理是否逻辑有效，结论是否逻辑相容（不自相矛盾）和完整。这就意味着，作为公理化的高级形态，对形式化方法更有一个检验形式系统是否满足公理化三条准则——其核心就是可证性，即推理的可靠性——的问题。比起实体公理化来，形式公理化必须而且可以在一个较高的水平上做到这一点，即可以在语法和语义的基础上进行严格论证。例如对命题演算系统，是通过证明该系统中所有可推导的结论都是永真式来验证其相容性的。但即使对形式系统，也不可能彻底实现验证其可证性的目标。这是因为，哥德尔不完备性定理已指出：“任一（以形式算术系统为子系统的）形式系统，如果是相容的，则在该系统中一定存在这样的命题：它自身及其否命题都不能在此系统内得到证明，因而该系统不完备”。这样，对一个形式系统应当满足的最重要标准——相容性的证明，不可能在该系统内部完成。这就说明，不能单纯依靠形式系统自身的力量解决其可靠性问题，最终还必须依赖于哲学的分析和实践的检验。

1.4 “三化”的层次性

由上可见，“三化”的基本功能和目标都存在着明显的差异，这可归纳为以下两方面：

第一，就对“三化”的逻辑要求而言，对数学化的目标——定量化的要求是随所研究的具体对象和内容不同而异的，很难作出统一的规定；数学模型的类型多样，从简单的算术四则运算到极为高深的泛函算子，深浅悬殊很大，因此对数学化的结果，也只能提出诸如论证严密、符合实际、能解决问题这样一般性的要求，即使对很复杂的数学模型，也只能一般地提出“不违背逻辑规律”之类的要求。而如前所述，对公理化则明确提出了全面进行逻辑重建的较高要求，并提出了验证公理系统符合三条逻辑准则的任务；对形式化又进一步提出了论证形式系统之逻辑可靠性的更高要求。

第二，就“三化”的使用对象和对同一对象的使用时间看，也有不同的限制：数学方法内容广泛，灵活方便，对一项研究，可能全局地使用，更可能局部地使用，可能在研究开始时就应用，也可能在研究工作深入发展后继续使用，所以数学方法应用的范围最广。实体公理化的应用是全局性的，并难于研究之初，这意味着实体公理化一般要以数学方法的应用为前提（例如先要对实验数据进行整理、计算和分析），积累成果，再考虑进行公理化概括。形式化方法不可能直接应用于非方法性学科，却在方法性学科的研究中可以大显身手，因为其研究对象本身已经形式化了，往往表现为各种形式化模型，例如系统工程模型。

综上所述,就形成了数学化、(实体)公理化和形式化三个由低到高的层次,对它们的逻辑要求依次提高,对它们使用的空间和时间范围的限制也依次更加严格。

2 “三化”语言相通,逻辑基础相同,一脉相承,互相渗透

现在我们从“三化”的实际应用和发展历史进行综合考察,就从广义上可以看出它们实际上是一个难以分割的整体。

2.1 “三化”在应用中互相渗透,交融璧合

“三化”之间虽然存在着层次差异,但如果考察“三化”应用的实例,却往往很难举出一个例子,说它只严格属于“三化”中的某一类型而不属于其他类型。比如,牛顿对经典力学的公理化重建,是用数学方法推演的,推演的过程和结果都是数学式子,就连他发表这一巨大成果的著作,其书名也称为《自然哲学的数学原理》,在这里就很难把公理化与数学化分开。希尔伯特在《几何基础》中所作的欧氏几何再次重建实际上已是形式公理化,但他又是以具体的几何语言表述的(尽管他强调其中所说的点、线、面也可以代表茶杯、椅子、桌子),人们在阅读此书时,思维很自然地只囿于几何学范畴,而不会使形式公理化游离于实体公理化之外。又如,系统论中几乎所有的系统工程模型也都同时是数学模型。

所以,我们只能得出这样的结论:从广义上看,“三化”在应用中互相渗透,往往融为一体,很难也没有必要人为地把它们截然分开。造成这种局面的根本原因就在于“三化”同属方法论范畴,它们都需要形式化语言,都需要把研究的形式与内容分离,因而必然需要互相配合。较具体地分析,就数学化而言,它已经是研究所论对象的形式化方法;运用数学方法,特别是非数值计算的数学定性分析,又总离不开公理方法的指导和配合,并且,对一门学科全面运用数学方法论证的过程,实际上也就是进行公理化的过程。反之,就实体公理化而言,它在许多情形中需要大量直接进行数学运算与分析;另一方面,实体公理化又一般表现为某种程度的数理逻辑分析。最后,形式公理化则是实体公理化与数学化相结合的产物,是完全量化的公理方法。

往进一步从“三化”的语言工具和论证方式等方面来分析,虽然也可发现它们的层次区别,但在实际应用中,更多的是互相渗透,交融璧合。首先,它们在语言方面是相通的:数学语言本身就是一类形式符号,实体公理化在运用数学方法时,当然也直接把数学语言作为自己的一部分语言;形式化语言起源于数学语言,而形式化方法的发展,又反过来促使数学语言不断丰富、更新和完善。其次,它们在推理方法上有共同的逻辑基础——演绎推理。前已指明,实体公理化和形式化是纯粹用演绎法进行推理论证的。数学的推理与运算本质上也是演绎推理,因为它们都符合演绎推理的基本原则:前提蕴涵结论,从一般到特殊。这也是任何用符号语言进行推理的一个共同特点。当然,演绎推理在数学方法上的表现不象公理方法那样单纯,其形式多种多样,有时也不很明显。

2.2 “三化”产生和发展的必然性

简单回顾一下“三化”产生和发展的历史,有助于我们进一步了解“三化”的功能及相互关系。众所周知,数学方法是由于生产实践的需要产生和发展的,其广泛的应用可以追溯到远古时期。特别在古希腊,几何学的发展雄踞科学之首。经过漫长的岁月,人们感到需要

对丰富的几何知识进行整理,使之形成系统的理论,终于在公元前三世纪,形成了以欧几里德《几何原本》为代表作的几何公理化方法。随着科学的进步,公理方法不仅推动了几何学和整个数学的发展,而且还对其他科学产生了巨大的影响。从17世纪牛顿时代开始,实体公理化方法在经典力学、热学等许多领域内获得巨大的成功,特别是非欧几何学的诞生,更使公理方法令人刮目相看,得到越来越广泛的应用。从19世纪后期以来,数学基础研究中出现了许多“悖论”,发生了“第三次数学危机”,为了消除“悖论”,解脱“危机”,论证数学理论的可靠性,形式化方法在数学基础研究中应运而生。与此同时,希尔伯特的著作《几何基础》,把欧几里德《几何原本》中的古典公理化方法提高到一个新的水平,使现代公理系统更加严密化、形式化。20世纪以来,由于许多方法性学科发展的需要,使形式化方法得到迅速发展和广泛应用。特别值得称道的是,形式化方法对电子计算机技术的产生和发展起了关键作用,作为计算机技术的理论基础,逻辑代数与数理逻辑就是逻辑科学数学化形式化的结晶。计算机需要形式化语言,又需要用这些计算机语言编制程序,程序设计就是一种形式化方法。所以,没有形式化处理的思想,就没有计算机技术。

由此看来,数学化、公理化和形式化方法的产生和发展,具有历史的必然性,它们是一脉相承的。公理化与形式化方法植根和成长于数学土壤中,又反过来促使数学城堡不断巩固、重建和扩展,面目一新。它们首先应用于数学方面,并以数学的公理化形式化为蓝本和楷模,引导推动其他学科的公理化形式化。当然,即使在现代,公理化和形式化应用得最广泛深入,成果最丰富完美的,仍在数学方面。更加上前面已详述过的“三化”之间存在着多方面的交融关系,因而我们又可以说:公理化和形式化实际上也是广义的数学化。

参 考 文 献

- 〔1〕 李超英·从公理化到形式化——兼议方法学科的形成和发展·自然辩证法研究, 1989; (1)
- 〔2〕 (德) J. D. 斯尼德著, 刘崎岩译·逻辑结构和公理化·自然科学哲学问题, 1988; (3)
- 〔3〕 郑毓信, 林曾·数学、逻辑与哲学·武汉: 湖北人民出版社, 1987
- 〔4〕 金守臣·现代逻辑基础·济南: 山东大学出版社, 1987
- 〔5〕 胡耀鼎, 张清宇·数理逻辑·北京: 中国标准出版社, 1985
- 〔6〕 黄耀枢·数学基础引论·北京: 北京大学出版社, 1987
- 〔7〕 徐利治·数学方法论选讲·武汉: 华中工学院出版社, 1983

Mathematization, Axiomatization and Formalization

Wu Danhuai

Abstract

The article begins with the differences between methodological subject and non-methodological subject and expounds the following points. On the one hand, it analyses specially the main function and goal of mathematization, axiomatization and formalization (MAF), and draws the conclusion that the "MAF", in the above order, forms the three coherences from low level to high and that in their given order, their logistic requirements rises and the restriction on use is rigid. On the other hand, in a general way, the "MAF" are of the same category of the methodological subject. Their expressions are interlinked. So they permeate one another and blend together in the application. At the end of the article, that the "MAF" originate and develop are written sketchily and the article points out that the "MAF" are in the same strain and that axiomatization and formalization are actually generally the mathematization.

Key words: mathematization, axiomatization, formalization, mathematical method, axiomatic method, formal method, methodological subject