S-闭空间的运算

汪 火 云

（基础课部）

摘　　要

本文的主要结果是：S-闭空间对既开又闭的子空间遗传；遗传正规的S-闭空间对闭子空间遗传；S-闭空间的有限和是S-闭空间；给出S-闭空间的积非S-闭的一个例子；若T_2空间的某一子集是S-闭的，则这一子集是闭的。

关键词：S-闭空间；子空间；运算

定义 1．设X是拓扑空间，X中的集A叫做半开集是指存在开集V，使$V\subset A\subset \overline{V}$；集P叫正则闭集是指$P=\overline{P^0}$；集Q叫做正则开集是指$Q=\overline{Q}^{\circ}$。

定理1．设M是X的开集，则M的任一半开集均是X的半开集。

证　设A是M的半开集，则存在U开于M，使$U\subset A\subset \overline{U}^M$。由于M开于X，则U开于X，有：$U\subset A\subset \overline{U}^M=\overline{U}\cap M\subset \overline{U}$，故A亦是X的半开集。

定理2．设X_i是拓扑空间，$i=1, 2, \cdots, n$

(a) 如果$A_i\neq\phi$，且是X_i的半开集，则$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$亦是$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$的半开集。

(b) 如果$P_i\neq\phi$，$P_i\subset X_i$，则$\prod\limits_{i=1}^{n}P_i$是$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$的正则闭集$\Longleftrightarrow P_i$是$X_i$的正则闭集。

(c) 如果$Q_i\neq\phi$，$Q_i\subset X_i$，则$\prod\limits_{i=1}^{n}Q_i$是$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$的正则开集$\Longleftrightarrow Q_i$是$X_i$的正则开集。

证　(a) 若A_i是X_i的半开集，则存在V_i开于X_i，使得：$V_i\subset A_i\subset\overline{V_i}$，$i=1, 2, \cdots, n$，故有$\prod\limits_{i=1}^{n}V_i\subset\prod\limits_{i=1}^{n}A_i\subset\prod\limits_{i=1}^{n}\overline{V_i}=\overline{\left(\prod\limits_{i=1}^{n}V_i\right)}$，则$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$是$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$的半开集。

(b) 若P_i是X_i的正则闭集，$i=1, 2, \cdots, n\Longleftrightarrow P_i=\overline{P_i^0}\Longleftrightarrow\prod\limits_{i=1}^{n}P_i=\prod\limits_{i=1}^{n}\overline{P_i^0}=$

本文于1991年9月21日收到

$\overline{\coprod_{i=1}^{n} P_i^0} = \overline{\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)^0} \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{n} P_i$是$\prod_{i=1}^{n} X_i$的正则闭集。

(c) 类似可证。

引理1．(a) 设$\bigoplus_{s\in S} X_s$是和空间，$V_s\subset X_s$，$\forall s\in S$，则$\bigcup_{s\in S} \overline{V_s} = \overline{\bigcup_{s\in S} V_s}$

(b) 设$\bigoplus_{s\in S} X_s$是和空间，$P_s\subset X_s$，$\forall s\in S$，则$\bigcup_{s\in S} P_s^0 = \left(\bigcup_{s\in S} P_s\right)^0$

证 (a) 只要证$\bigcup_{s\in S} \overline{V_s} \supset \overline{\bigcup_{s\in S} V_s}$即可

若$\forall y \bar{\in} \bigcup_{s\in S} \overline{V_s}$，则$\forall s\in S$，$y \bar{\in} \overline{V_s}$，又因$y\in \bigoplus_{s\in S} X_s$，故存在$S_1\in S$，使$y\in X_{s_1}$，由于$y\bar{\in}\overline{V_{s_1}}$，故存在点$y$于$X_{s_1}$的开邻域$U_{s_1}$，使$U_{s_1}\cap V_{s_1}=\phi$，显然$U_{s_1}$亦开于和空间，且$U_{s_1}\cap\left(\bigcup_{s\in S} V_s\right)=U_{s_1}\cap V_{s_1}=\phi$，有$y\bar{\in}\overline{\bigcup_{s\in S} V_s}$

(b) 只要证$\bigcup_{s\in S} P_s^0 \supset \left(\bigcup_{s\in S} P_s\right)^0$即可

若$\forall y\in\left(\bigcup_{s\in S} P_s\right)^0$，则存在点$y$的开邻域$U_y$，使$y\in U_y\subset \bigcup_{s\in S} P_s$，同时亦存在$S_1\in S$，使$y\in X_{s_1}$，有：$y\in U_y\cap X_{s_1}\subset\left(\bigcup_{s\in S} P_s\right)\cap X_{s_1}=P_{s_1}$，由和空间的定义知$U_y\cap X_{s_1}$开于$X_{s_1}$，故$y\in P_{s_1}^0\subset \bigcup_{s\in S} P_s^0$

定理3．(a) 若$A_s\subset X_s$，$\forall s\in S$，$\bigcup_{s\in S} A_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的半开集$\Longleftrightarrow A_s$是X_s的半开集。

(b) 若$P_s\subset X_s$，$\forall s\in S$，$\bigcup_{s\in S} P_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的正则闭集$\Longleftrightarrow P_s$是X_s的正则闭集。

(c) 若$Q_s\subset X_s$，$\forall s\in S$，$\bigcup_{s\in S} Q_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的正则开集$\Longleftrightarrow Q_s$是X_s的正则开集。

证 (a) 若$\forall s\in S$，A_s是X_s的半开集，则存在V_s开于X_s，使得：$V_s\subset A_s\subset\overline{V_s}$，进而有：$\bigcup_{s\in S} V_s\subset \bigcup_{s\in S} A_s\subset \bigcup_{s\in S}\overline{V_s}=\overline{\bigcup_{s\in S} V_s}$（引理1），故$\bigcup_{s\in S} A_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的半开集。

反之，如果$\bigcup_{s\in S} A_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的半开集，则存在U开于$\bigoplus_{s\in S} X_s$，使$U\subset \bigcup_{s\in S} A_s\subset\overline{U}$。因为$U=U\cap \bigoplus_{s\in S} X_s$，令$U\cap X_s=U_s$，则$U_s$开于$X_s$，$\forall s\in S$，有：$U=\bigcup_{s\in S} U_s\subset \bigcup_{s\in S} A_s\subset \overline{\bigcup_{s\in S} U_s}=\bigcup_{s\in S}\overline{U_s}$，由于$\{X_s: s\in S\}$两两不交，故$\forall s\in S$，$U_s\subset A_s\subset\overline{U_s}$，即$A_s$是$X_s$的半开集。

(b) 若P_s是X_s的正则闭集，$\forall s\in S\Longleftrightarrow P_s=\overline{P_s^0}\Longleftrightarrow \bigcup_{s\in S} P_s=\bigcup_{s\in S}\overline{P_s^0}=\overline{\bigcup_{s\in S} P_s^0}$

$=\overline{\left(\bigcup_{s\in S} P_s\right)^0}$（引理1）。$\Longleftrightarrow \bigcup_{s\in S} P_s$是$\bigoplus_{s\in S} X_s$的正则闭集。

(c) 类似可证。

定义2．设X是拓扑空间，如果X中的开集包仍是开集，则称X为极不连通的空间。

定理4．(a) 设X_i是拓扑空间，$i=1,2,\cdots,n$，若$\prod_{i=1}^{n}X_i$是极不连通的空间，则X_i亦是极不连通的空间。

(b) $\bigoplus_{s\in S}X_s$是极不连通的空间$\Longleftrightarrow X_s$是极不连通的空间，$\forall s\in S$。

证　(a) 设$\prod_{i=1}^{n}X_i$是极不连通的空间，P_i是X_i的任意正则闭集，$i=1,2,\cdots,n$．由于$X_i=\overline{X_i{}^0}$，$i=1,2,\cdots,n$，故由定理2知$X_1\times X_2\times\cdots\times X_{i-1}\times P_i\times X_{i+1}\times\cdots X_n$是$\prod_{i=1}^{n}X_i$的正则闭集，由〔1〕命题3知，上述的正则闭集开于$\prod_{i=1}^{n}X_i$。从而$P_i$开于$X_i$，又由〔1〕命题3知$X_i$是极不连通的空间。

(b) $\forall s\in S$．设X_s是极不连通的，$\forall A=A\cap\bigoplus_{s\in S}X_s=\bigcup_{s\in S}A_s\subset\bigoplus_{s\in S}X_s$。若A是正则闭集，由定理3知，$A_s$是$X_s$的正则闭集，又由〔1〕命题3知$A_s$开于$X_s$，从而A开于$\bigoplus_{s\in S}X_s$，故$\bigoplus_{s\in S}X_s$是极不连通的空间。

反之，若$\bigoplus_{s\in S}X_s$是极不连通的空间，$\forall s_1\in S$，设P_{s_1}是X_{s_1}的任一正则闭集，因$\forall s\in S$，有：$X_s=\overline{X_s{}^0}$，故X_s是正则闭集。由定理3知$P_{s_1}\cup\left(\bigcup_{s\neq s_1}X_s\right)$是$\bigoplus_{s\in S}X_s$的正则闭集。由$\bigoplus_{s\in S}X_s$极不连通，则得$P_{s_1}\cup\left(\bigcup_{s\neq s_1}X_s\right)$开于$\bigoplus_{s\in S}X_s$，从而$P_{s_1}$开于$X_{s_1}$，故$X_{s_1}$是极不连通的。

定理5．设X是拓扑空间，M是开且闭的子集，则

(a) 如果P是M的正则闭集，则P亦是X的正则闭集。

(b) 如果Q是M的正则开集，则Q亦是X的正则开集。

证　(a) 令$iM(P)$表示P于M的内部；令$i(P)$表示P于X的内部，显然有：

$iM(P)=i(P)$，这里$P\subset M$

〔因为：$\forall x\in iM(P)$，存在V开于M，使$x\in V\subset P\subset M$，显然V开于X，故$x\in i(P)$，反之，$\forall y\in i(P)$，则存在U开于X，使$y\in U\subset P\subset M$，显然$y\in U\cap M$，而$U\cap M$开于M，故$y\in iM(P)$〕

若P是M中的正则闭集，则$P=\overline{iM(P)}^M=\overline{i(P)}^M=\overline{i(P)}$，从而P是X中的正则闭集。〔因为M闭于X，故M中闭集就是X中的闭集。〕

(b) 类似可证。

定义3. 拓扑空间X叫S-闭的，是指从X的每一个正则闭覆盖中都能选出X的有限子覆盖。

定理6. 设X是S-闭的，M是X的开且闭集，则M亦是S-闭的。

证 令A是M的正则闭覆盖，则由定理5知A是X的正则闭集簇，由于M是X的开且闭集，则X＼M亦是X的开且闭集。故 $\overline{(X\setminus M)^{0}}=\overline{X\setminus M}=X\setminus M$，故X＼M是X的正则闭集，因此A∪（X＼M）是X的正则闭集簇且覆盖X。

由于X是S-闭的，故存在有限子覆盖A_1。若A_1的成员均是A的，则A_1是A的有限子覆盖，故M是S-闭的。若A_1成员中有X＼M，剔去此元素，$A_1\setminus\{X\setminus M\}$是A的有限子簇且覆盖M。故M是S-闭的。

定理7. 设X是遗传正规的S-闭空间，则X的任一闭子集M均是S-闭的。

证 设X是遗传正规的S-闭空间，由〔1〕中定理7知X是极不连通的紧空间。

由于M闭于X，故M是正规的、紧致的，由〔2〕P456问题6.2.G(C)知M亦是极不连通的，又由〔1〕中定理7知M是S-闭的。

定理8. (a) 若 $\bigoplus_{s\in S} X_s$是S-闭空间，则X_s亦是S-闭空间，$\forall s\in S$

(b) 若$|s|$有限，$\forall s\in S$，X_s是S-闭的，则 $\bigoplus_{s\in S} X_s$亦是S-闭的。

证 (a) 由定理6直接得出

(b) 反对$|s|=2$时证明

令$C=\{C_s: s\in S\}$是$X_1\oplus X_2$的正则闭覆盖，令$C_s=A_s\cup B_s$，$\forall s\in S$，由定理3知$\{A_s: s\in S\}$、$\{B_s: s\in S\}$分别是X_1, X_2的正则闭覆盖。由于X_1、X_2是S-闭的，故存在有限集簇$\{A_s: s\in S_1\}$覆盖X_1，这里$|S_1|$有限，$s_1\subset S$，存在有限集簇$\{B_s: s\in S_2\}$覆盖X_2，这里$|S_2|$有限，$s_2\subset S$。

令$S_0=S_1\cup S_2$，则$\{A_s\cup B_s: s\in S_0\}$是$X_1\oplus X_2$的一个有限子覆盖，故$X_1\oplus X_2$是S-闭的。

定理9. 设X是极不连通的Tychonoff空间，则βX是S-闭的。

证 由〔2〕P453定理6.2.7知βX是极不连通的，由βX紧致，故βX是S-闭的。

推论. βN亦是S-闭的。

证 因N是离散的拓扑空间，故N是极不连通的，又因N是Tychonoff空间，故βN是S-闭的。

例 βN×βN是非S-闭的。

因为βN是紧致、正规的，当然βN×βN是紧致、正规的。若βN×βN是S-闭的，则由〔1〕中定理7知βN×βN是极不连通的，这与〔2〕中P465问题6.3.21矛盾！故βN×βN非S-闭的。

这例子指出：S-闭空间的积不一定是S-闭的。

定义4. T_2的拓扑空间叫做H-闭的，是指对X的每个开复盖ψ，都可以从$\overline{\psi}$中选出有限子复盖。一般地，把具有这种性质的空间（不必是T_2的）叫做H(i)空间。

定理10. 设B为拓扑空间的基，若由B的成员构成的每一开复盖，从其闭包簇中能选出有限子复盖，则X为H(i)空间。

证　设G为X的任一开覆盖，$\forall A\in G$，由于A开于X，存在$B_A\subset B$，使得$A=\bigcup\{B: B\in B_A\}$，令$G_1=\bigcup\{B_A: A\in G\}$，则$G_1$是由B的成员构成的X的一个开覆盖。由条件知，从$\overline{G_1}$中能选出$\overline{B_1}$，$\overline{B_2}$，…，$\overline{B_n}$，$n\in N^+$，使它们的并覆盖X。而对于每一$B_i\in G_1$，存在$A_i\in G$，使$B_i\in B_{A_i}$，有$B_i\subset A_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

显然有$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}=X$，即从$\overline{G}$中能选出有限子覆盖，故X是H(i)空间。

定理11. 设X是拓扑空间，$C\subset X$且C是H(i)空间，则每一由X的开集构成C的覆盖B，都能从$\overline{B}$中选出关于C的有限闭覆盖。

证　若C为X的H(i)空间，B为由X的开集组成的C的覆盖，则$B_1=\{C\cap A: A\in B\}$为C的开覆盖，由于C为H(i)空间，故从$\overline{B_1}$中能选出有限子覆盖：$\overline{C\cap A_1}^C$，$\overline{C\cap A_2}^C\cdots$，$\overline{C\cap A_n}$，$n\in N^+$。显然$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}\supset C$，故$\{\overline{A_1},\overline{A_2},\cdots,\overline{A_n}\}$是从$\overline{B}$中选出的关于C的有限闭覆盖。

定理12. 如果X_1是S-闭空间，X_2是H(i)空间，则$X_1\times X_2$是H(i)空间。

证　令B是由$X_1\times X_2$的基元构成的开覆盖，$\forall x\in X_1$，则$\{x\}\times X_2\cong X_2$，由X_2是H(i)空间知$\{x\}\times X_2$亦是H(i)空间，显然B覆盖$\{x\}\times X_2$。由定理10，从$\overline{B}$中能选出$\{x\}\times X_2$的有限闭覆盖，$\overline{B}_X=\{\overline{U}_{X1}\times\overline{V}_{X1},\cdots,\overline{U}_{Xn}\times\overline{V}_{Xn}\}$，其中$U_{Xi}$开于$X_1$，$V_{Xi}$开于$X_2$，$i=1,2,\cdots,n$，不妨设$\overline{B}_X$中元素均与$\{x\}\times X_2$相交（否则剔去此元素）。

令$M_X=\overline{U_{X1}\cap U_{X2}\cap\cdots\cap U_{Xn}}$，则$M_X$是正则闭集，且有：$M_X=\overline{U}_{X1}\cap\overline{U}_{X2}\cap\cdots\cap\overline{U}_{Xn}$. 故有：

$$\left(\overline{U}_{X1}\times\overline{V}_{X1}\right)\cup\cdots\cup\left(\overline{U}_{Xn}\times\overline{V}_{Xn}\right)\supset M_X\times\left(\overline{V}_{X1}\cup\cdots\cup\overline{V}_{Xn}\right)=M_X\times X_2\supset\{x\}\times X_2$$

即$\overline{B}_X$是$M_X\times X_2$的一个闭覆盖。令$G=\{M_X: x\in X_1\}$，则G是X_1的正则闭覆盖。由于X_1是S-闭的，故存在有限子覆盖M_{X1}，M_{X2}，…，M_{Xm}。

令$\overline{B}_0=\overline{B}_{X1}\cup\overline{B}_{X2}\cup\cdots\cup B_{Xm}$。显然$|\overline{B_0}|$有限，且$\cup\overline{B_0}\supset(M_{X1}\times X_2)\cup\cdots\cup(M_{Xm}\times X_2)\supset(M_{X1}\cup\cdots\cup M_{Xm})\times X_2$

$$=X_1\times X_2$$

故$\overline{B}_0$是从B中选出的$X_1\times X_2$的有限闭覆盖，由定理10知$X_1\times X_2$是H(i)空间。

定理13. 设$X\in T_2$，$A\subset X$，A是H(i)空间，则$\forall x\notin A$，存在点X的开邻域U，使$U\cap A=\phi$

证　$\forall y\in A$，则$y\neq x$，由于$X\in T_2$，故可选出y的开邻域U_y与X的开邻域V_y，使$U_y\cap V_y=\phi$，进而有：$\overline{U}_y\cap V_y=\phi$，则$\{U_y: y\in A\}$是由X的开集组成的关于A的一个开覆盖，由定理11知，存在有限的闭覆盖，即有：

$\overline{U}_{y1}\cup\overline{U}_{y2}\cup\cdots\cup\overline{U}_{yn}\supset A$，$n\in N^+$

令$U=V_{y1}\cap V_{y2}\cap\cdots\cap V_{yn}$

则$U\cap\overline{U}_{yi}=\phi$，$i=1,2,\cdots,n$

而$U\cap A\subset U\cap(\overline{U}_{y1}\cup\overline{U}_{y2}\cup\cdots\cup\overline{U}_{yn})$

$=\phi$

即$U\cap A=\phi$

定理14. 设$X\in T_2$，$A\subset X$，若A是S-闭子空间，则A闭于X。

证　由于$X\in T_2$，则$A\in T_2$，又因A是S-闭的，由[1]中定理4知，A是H-闭的。由定理13知，$\forall x\in X\setminus A$，存在点x的开邻域$U_X$，使$U_X\cap A=\phi$，即$U_X\subset X\setminus A$。从而$X\setminus A=\bigcup_{x\in A}U_X$，即$X\setminus A$开于X，故A闭于X。

感谢江西师大陈清煊教授的指导！

参考文献

[1] 王国俊·S-闭空间的性质·数学学报，1981；24(1)：55—63

[2] R.ENGELKING·General Topology.Warszawa：Polish Scientific Publishers，1977

Operations on S–closed Spaces

Wang Huoyun

Abstract

The main results are as follows:

S-closed spaces is hereditary with respect to opened-closed subspaces. The S-closed space of hereditarily normal is hereditary with respect to closed subspaces. The finite sum of S-closed spaces is S-closed space. An example is given for the S-closed spaces cartesian product is non-S-closed space. Every S-closed subspace of T_2 space X is a closed subsets of X.

Key words: S-closed spaces; subspaces; operations