第9卷 第1期 华东交通大学学报 Vol.9 No.1
1992年 3月 Journal of East China Jiaotong University Mar. 1992

恶无限性造成三次数学危机

凌鄂生

（宣传部）

摘　　要

数学史上出现的三次数学危机，与其说是“数学的危机”，不如说是“数学哲学的危机”。解决的办法只有依靠哲学。三次数学危机的共性是在于数学家们研究数学的过程中执拗于恶无限性，也由于思维把一个对象的实际上联结在一起的各个环节彼此分隔开来考察。三次数学危机给我们的反思：自然科学家力图建立无所不包的庞大理论体系行不通；单靠形式逻辑不能解决危机；一直到现在，数学家们仍重犯恶无限性毛病，数学的演进始终是在离散与连续相互作用和相互补充的矛盾中。

关键词：数学危机；恶无限性；哲学

1　三次数学危机的回顾

数学史上曾出现过三次数学危机。第一次危机起始于公元前五世纪。当毕达哥拉斯学派沉湎于“万物皆数”哲学，即万物皆为有理数的理论中，一个正方形的对角线和边不包含公共的度量单位，没法用有理数来表示的量的出现，给毕达哥拉斯学派以强烈的冲击，动摇了希腊人“一切量都可用有理数表示”的普遍信仰。暴露了离散数量概念的片面性，导致希腊人认为直接经验并非绝对可靠转而偏重推理论证。一时偏爱可以表示数的几何量，出现了西方第一部经典著作《原本》以及公理化方法。

第二次数学危机产生于十七世纪末。当牛顿和莱不尼兹发现微积分后，恩格斯曾给予高度评价，认为在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神最高胜利了。当时欧洲及其它地方为微积分的发现及在物理、化学、天文诸方面开始运用而兴高采烈不已，可谁也说不清它的理论。如求非匀速运动的物体在

$t=t_0$时的速度，有

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

对于这事，其中最大的问题是Δt到底是不是0？如果是0，那么

本文于1991年11月2日收到

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\text{便是}\frac{0}{0}$$

毫无意义；如果不是0，则在Δt除Δs后便不应令$\Delta t=0$，于是哪怕Δt是极小的非零，结果也只能是近似值而非精确值，但那时数学家又坚持所得的结果是精确值而非近似值，这便进退维谷了。柯西系统地发展了极限论，人们认为这已把微积分的基础问题解决了，即第二次数学危机得到解决。其实柯西只是把微分过程中的Δt规定为以0为极限的变量即无穷小量。他给一般极限定义为："若代表某变量的一串数值无限地趋向于某一固定数值时，其差可以随意小，则该固定值称为这串数值的极限。"他回避了变量是否变到它的极限的问题，只在新的条件下发展和系统地运用了"穷竭法"的无限思想。

十九世纪数学家们为了寻求柯西极限理论更坚实的基础，导致了康托尔集合论的建立。康托尔把个别的有限的东西概括出一般的具有无限性的思想运用到数学中，从最简单的自然数开始，创造出集合论宏大体系。康氏的集合论取得了巨大的成功，弥补了柯西极限论的逻辑缺陷。康氏集合论使数学家们踌躇满志、欣喜若狂。1900年在巴黎国际会议上，法国大数学家彭加勒宣布："现在我们可以说，完全的严格性已经达到了。"他还直言不讳地说在分析学中除整数、或有限或无限的数系外，就一无所需了。但是到了1902年，罗素从"一切集合的集合"引伸出的悖论使数学家们瞠目结舌。罗素把集合分成两类，甲类集合它自己是自己的元素，记为P，有$P\in P$；乙类集合它自己不是自己的元素，记为θ，有$\theta\bar{\in}\theta$。这两类集合互斥，一个集合不属于甲类便属于乙类，不可兼顾。现问：θ也是一个集合，它属于哪一类？若$\theta\in P$，按甲类集合定义有$\theta\in\theta$；若$\theta\in\theta$，说明θ满足甲类集合定义，有$\theta\in P$，这足以说明θ属于θ又属于P。人们为了解决罗素悖论及其它悖论，创造了ZF公理集合论系统，允许集合的无止境的扩充运算但不允许"一切集合的集合"存在。从整体看，第三次数学危机并没有得到令人满意的解决，致使当代最伟大的数学家之一H·魏尔悲观地说："数学的基础以及最终意义问题仍然没有解决，我们根本不知道在什么方向上，它会找到最终的解决办法，或者能否指望有一个最终的、客观的答案。"

正如许多明智之士所指出，三次数学危机的出现，并没有使数学发展停滞，从某种意义上说，却启动着数学向前猛进。所谓数学危机，与其说是"数学本身的危机"，不如说是"数学哲学的危机"，解决的办法只有依靠哲学。

2 三次数学危机的共性

三次数学危机揭示出，数学家们所津津乐道的数学严密性一次又一次受到撼动，可不少数学家仍紧抱着固有的程式，自以为是的傲态，对其它学科研究方法的轻视，对辩证逻辑的缺乏探究，已受到许多挫折。黑格尔说得透彻："其实真正令人恐怖之处只在于永远不断地规定界限，又永远不断地超出界限，而并未进展一步的厌倦性"。这无疑是给数学家们一帖清醒的药方。

公元前五世纪毕达哥拉斯学派的"万物皆为数"，他们企图把一切量都用有理数来表示，实质上是把有理数留在无穷进展的坏的无限中。黑格尔说得对："真的无限性不可视为一种纯粹在有限万物彼岸的东西，我们想要获得对于真的无限的意识，就必须放弃那种无限

进展。”当正方形的对角线和边不包含公共的度量单位被发现时，恰到好处扬弃了坏的无限。

在第二次数学危机中，人们喋喋不休地争议Δt到底是不是0，如果是0，

那么$\frac{\Delta s}{\Delta t}$便是$\frac{0}{0}$

毫无意义。在这里，数学家们依旧是把$\Delta t\to 0$看成一个恶无限性，在质上和有限对立，和有限没有联系，有限是此岸，无限在彼岸，无限在有限之上，在有限之外。马克思在研究导函数时，设$y=ax$，x增长到x_1，则$y_1=ax_1$，建立

比值$\frac{y_1-y}{x_1-x}$或$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

若x_1减少，它将趋近于x；一旦x_1变成x，它就达到了减少的极限。这样一来，就使差值$x_1-x=x-x=0$，从而$y_1-y=y-y=0$，这样我们就得出

$$\frac{0}{0}=a$$

由于在0/0这个表示式中，0/0的来源和意义的任何痕迹都已消失，代之以dy/dx，其中有限差值x_1-x或Δx以及y_1-y或Δy，都作为扬弃了的或消失了的差值而以符号化的形式出现。或者说$\Delta y/\Delta x$变成了dy/dx，因而

$$\frac{dy}{dx}=a$$

一些唯理的数学家们，固执地认为dy和dx在量上实际只是无限小，〔dy/dx〕只是接近0/0，他们借此聊以自慰只是幻想。

马克思进一步又举了一个例子说明：

$$y=ax^3+bx^2+cx-e$$

如果x增长到x_1，那么

$$y_1=ax_1^3+bx_1^2+cx_1-e$$

$$y_1-y=a(x_1^3-x^3)+b(x_1^2-x^2)+c(x_1-x)$$

因此$\frac{y_1-y}{x_1-x}$或$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$

如果在函数$a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$中，变量$x_1$减少，直到其减少的极限，也就是变为等于$x$，那末$x_1^2$变到$x^2$，$x_1x$变为$x^2$，以及$x_1+x$变为$2x$，从而我们得到$x$的导函数

$$3ax^2+2bx+c$$

这里令人信服地表现：

第一，为了得到“导函数”，就必须令$x_1=x$，所以是严格数学意义上的$x_1-x=0$，而无需任何只是无限接近之类的遁辞。

第二，由于令$x_1=x$，于是$x_1-x=0$。这样一来，就根本没有什么符号化的东西进入“导函数”。原先通过x的变化而引入的那个量x_1并没有消失，它只是减少到了它的最小极限值（$=x$），并且始终是x的原函数中新引进的元素，它通过部分地和自身相结合，部分

地和原函数中的x相结合，给出了最终“导函数”，……

马克思据此断言，可把Δt认为是0，0/0是很有意义的。

请特别注意打重点号的那一段。这一段醒目的文字明确无误地告诉我们，真的无限存在于事物变化过程中，最终的“导函数”已显露在x_1通过部分地和自身相结合，部分地和原函数中的x相结合之中。

这种有限中存在着无限，无限中存在着有限的辩证思维，至今仍使不少数学家们无法思议。

第三次数学危机在于数学家们把集合本身单纯滞留在无穷进展的坏的无限中。数学家们给自己规定了一个界限——某种集合，当提出一个“一切集合的集合”时又陷入迷惘之中。其实“一切集合的集合”只不过是逾越出原先的界限而已。“一切集合的集合”仍未逃脱那种有限是此岸，无限在彼岸，无限在有限之上，在有限之外的形而上学思想。

通过以上所述，我们可以看出三次数学危机所显示的通病，就是在进程中执拗于恶无限性，也由于思维把一个对象的实际上联结在一起的各个环节彼此分离开来考察。数学家们论及无限时，就把有限抛掉；论及有限时，又把无限甩在一边。殊不知两者如南北极无法分开，真可谓我中有你，你中有我。恩格斯正确地指出，无限的前进过程并不是同一个东西的永恒的重复，“而是发展，是前进或后退，因而它成为运动的必然形式。”第一次数学危机中的有理数无穷进展就包含有发展为一个正方形的对角线和边不包含公共的度量单位的无理数必然，第二次数学危机中$\Delta t \to 0$本身不断发展致使$\Delta t = 0$是自然的结果，第三次数学危机中一切集合的集合从集合本身非坏的无限中得出是水到渠成。

归纳一下，三次数学危机出现的特征：

(1)永远不断地规定界限，又永远不断地超出界限。

(2)在论及有限与无限时，老是犯恶无限性错误，数学家们老是把无限的前进过程看成是同一个东西的永恒重复，极力否认它是运动的必然形式。

(3)数学家们总是把有限和无限割离开，拒不承认一切有限之中蕴藏着丰富的无限，而无限中又包含千姿百态的有限。

3 几点反思

3.1 翻开科学史，我们可以看到，不少自然科学家总是力图去建立各种各样庞大的理论体系，想方设法使它能罗致一切研究对象，其实这是徒劳的。廿世纪最出色的物理学家爱因斯坦，当他建立了狭义相对论和广义相对论后，也感染了企图建立庞大理论系统的通病，绞尽脑汁去构造一个无所不包的粒子理论系统，最终不得不承认是不切实际的。

3.2 三次数学危机出现的共同特征，告诫人们靠形式逻辑是不能解决危机的。危机出现一次又一次，而我们的数学家们总是囿于那一方小天地，执拗地拒绝跳出形而上学框框，致使危机得不到解决。只有辩证逻辑，才能剖析事物的本质，才能从整体上把握客观世界，才能使人们的思维不局限于把事物简单地分割成这一极那一极，才能使有限与无限有机统一，才能为系统不断开放提供坚实的理论基础。

3.3　三次数学危机延续了二千多年，数学这门学科并不因为出现危机而停顿，一代又一代数学家为数学的基础建立及广泛应用作出不懈努力。十九世纪末廿世纪初希尔伯特提出了跨世纪数学问题，希尔伯特设想将理论划分为不同层次：对象理论和元理论，用元理论即元数学去证明对象理论即某一数学理论的不矛盾性，希望用公理化方法构造全部数学。几十年来人们总按他所指去试图建立各种自然科学学科理论系统，更以能建立一个庞大系统而倍感殊荣，演绎法到处走俏，归纳法似乎过于沾染现实成份而被轻视。希尔伯特元理论本身的不矛盾性又需要元理论来证明。哥德尔从数学上证明了希尔伯特规划是不可能实现的，人们企图把矛盾推移到无限远去，这是一种从直觉看来很合理的回避矛盾的方法。但从逻辑上分析的结果是：被设想为不矛盾目标的无限远处也是一个矛盾的陷井。希氏依然犯了恶无限性毛病。

3.4　亚里士多德提出了公理系统的"始原原则"。康托尔集合论遵循的基本原则之一是"概括原则"。徐利治和朱梧贾提出了"不断延伸"和"相对穷竭"两条原理，在此基础上建立了"双相无限论"，其目的是设法解决无限的数学理论的不矛盾性问题，这样做无疑是有益的。但切莫认为这样做能解决一切问题，任何自然科学理论系统内总存在矛盾，矛盾无所不在，在突破系统框框后亦如此。数学的历史一直是在离散与连续相互作用和相互补充的矛盾中演进。正如光既有粒子性又有波动性一样，数学就是一门既有离散性又有连续性的学科，黑格尔一段话鞭辟入里：连续的量也同样是分离的，因为它是多的连续；而分离的量也同样是连续的，因为它的连续性就是作为许多一的同一或统一的"一"。

H·魏尔庸人自扰地认为数学基础以及最终意义问题仍然没有解决，实质上是恶无限性在头脑中作祟。

让我用《实践论》中一段话作为结束语。"马克思主义者承认，在绝对的总的宇宙发展过程中，各个具体过程的发展都是相对的，因而在绝对真理的长河中，人们对于在各个一定发展阶段上的具体过程的认识只是有相对的真理性，无数相对的真理之总和，就是绝对的真理"。

参　考　文　献

〔1〕马克思·数学手稿·复旦学报自然科学版（专辑），1975；1—5

〔2〕恩格斯·自然辩证法·北京：人民出版社，1961

〔3〕毛泽东·毛泽东选集第一卷·北京：人民出版社，1991；261

〔4〕黑格尔·小逻辑·上海：商务印书馆，1982

〔5〕M·克莱因·古今数学思想·上海：科学技术出版社，1979

〔6〕戴再平·数学哲学及其几个基本问题·数学通报，1991；1：1—5

〔7〕洪辛·芝诺危机与数学危机·自然辩证法研究，1986；Ⅱ(2)：39—48

Three Mathematic Crisis Caused by Vicious Infinite

Ling Esheng

Abstract

Three mathematic crises in mathematics history is philosophic mathematic crisis rather than mathematic crisis. The solution is only to depend on philosophy. the generality of three crises lies in the process through which the mathematicians have wilfully studied the vicious infinite. It is also caused by the thinking method which led the mathematicians to study separately the actually linked subject. From looking back the crises, we should wake up; it is impossible for natural scientists to try to et up a huge theoretical system which consists of everything; it is not enough to depend on formal logic to solve the crises; until now, the mathematicians still repeat the mistake of the vicious infinite, and the mathematic progress has always been made in the contradiction of the separate and continuous interaction and complement.

Key words: mathematic crises; the vicious infinite; philosophy