

关于可图的循环置换群*

周 尚 超

(基础课部)

摘 要

集合 X 上的置换群 H 称为可图的,若存在图 G ,使得 H 与 G 的自同构群 $\text{Aut}G$ 恒等。本文得到了由一个置换 σ 生成的群可图的充分必要条件,这里 σ 是这样的一个置换,在 σ 的轮换分解中, σ 有一个轮换的长度是所有其它轮换长度的倍数。本文还得到了 P^n 阶循环群可图的充分必要条件,这里 P 是任意素数。

关键词: 图; 自同构群; 循环群

0 引言和定理

设 H 是集合 X 上的置换群, G 是顶点集为 $V = V(G)$,边集为 $E = E(G)$ 的图,若 H 与 G 的自同构群 $\text{Aut}G$ 恒等,则称 H 是可图的。设 σ 是 V 上的置换,我们总是把 σ 表示为不交的轮换之积: $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \varepsilon$, 这里 σ_i ($i=1,2,\dots,n$) 是长度大于1的轮换, ε 是 σ 的不动点集上的恒等置换。我们用 $\theta = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 表示这样的轮换: $\theta(u_i) = u_{i+1}$, $j=i+1 \pmod{n}$, 用 $|\theta| = n$ 表示 θ 是长度为 n 的轮换。给定置换群 H , 要证明 H 是否可图是很困难的。Kagno^①和Chao^②证明了由一个轮换 θ ($|\theta| > 2$) 生成的群 $\langle \theta \rangle$ 是不可图的。S.P.Mohanty等人证明了下面3个定理^③。

定理A 设 $\sigma = (1, 2, \dots, m) \cdots (\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n})$, n 整除 m , $n > 5$, 则 $\langle \sigma \rangle$ 是可图的。

定理B 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$, $|\sigma_i|$ 整除 $|\sigma_j|$ ($i=1,2,\dots,n$), $|\sigma_1| > 5$, 则 $\langle \sigma \rangle$ 是可图的。

定理C 设 $\langle \sigma \rangle$ 是 P^n 阶群, P 是大于5的素数, 则 $\langle \sigma \rangle$ 可图的充分必要条件是 σ 至少有2个长度大于1的轮换。

本文证明了如下两定理。

定理1 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \varepsilon$, $|\sigma_i|$ 整除 $|\sigma_1|$ ($i=1,2,\dots,n$), $|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \cdots \geq |\sigma_n| \geq 2$, $|\sigma_1| > 2$, $n \geq 2$, 则 $\langle \sigma \rangle$ 可图的充分必要条件是满足下列条件之一:

1) $|\sigma_2| > 5$

本文于1992年2月21日收到

* 江西省自然科学基金会资助课题。

2) $\{|\sigma_2|, |\sigma_3|, \dots, |\sigma_n|\}$ 中有 2 个为 j , $j \in \{3, 4, 5\}$

3) $\{|\sigma_2|, |\sigma_3|, \dots, |\sigma_n|\}$ 中有一个为 4, 有一个为 2。

定理2 设 $\langle \sigma \rangle$ 是 P^r 阶群, $P^r > 2$, P 是任意素数, 则 $\langle \sigma \rangle$ 可图的充分必要条件是 σ 至少有 2 个长度大于 2 的轮换, 其中当 σ 恰有 2 个长度大于 2 的轮换时, 这 2 个轮换的长度都大于 5。

1 定理1和定理2的证明

设 X_1 和 X_2 是两个不交的集合, h_i ($i=1, 2$) 是 X_i 上的置换, 我们用 $h_1 h_2$ 表示 $X_1 \cup X_2$ 上的这样的置换: 当 $x \in X_i$ 时, $h_1 h_2(x) = h_i(x)$ 。

引理1 设 $H = \text{Aut} G$, $v(G) = V$, $V \cap D = \phi$ (空集), 这里 D 是 r 元集, ε 是 D 上的恒等置换, 则 $H\varepsilon$ 是可图的, 这里 $H\varepsilon = \{h\varepsilon | h \in H\}$

证明 因为 G 的补图的 $\overline{G}$ 的自同构群也是 H , 因此可设 G 是连通的。设 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_r\}$, $r > 1$ 。令 $V(G') = V \cup D$, $E(G') = E(G) \cup \{[v, d_1], [d_1, d_2], \dots, [d_{r-1}, d_r]\}$, 这里 $[u, v]$ 表示邻接 u 与 v 的边, $[v, d_1] = \{[u, d_1] | u \in V\}$, 则 d_r 是 G' 的度为 1 的唯一顶点, 因此若 $\tau \in \text{Aut} G'$, 则 $\tau(d_r) = d_r$, $\tau(d_{r-1}) = d_{r-1}, \dots, \tau(d_1) = d_1$, $\tau = h\varepsilon, h \in H$ 。反之, 若 $\tau \in \text{Aut} G$, 则 $\tau\varepsilon \in \text{Aut} G'$, 因此 $\text{Aut} G' = H\varepsilon$ 。设 $r=1$, 则令 $E(G') = E(G)$, 显然有 $\text{Aut} G' = H\varepsilon$ 。

根据引理1, 要证 $\langle \sigma \rangle$ 可图, 只要证明 σ 没有不动点的情形就行了。

定理1充分性的证明。 设 $n=2$, $|\sigma_2| > 5$, 则 $\langle \sigma \rangle$ 是可图的 (定理A)。设 $n \geq 3$, 用 $D_i = V(\sigma_i)$ 表示 σ_i 变动的顶点集 ($i=1, 2, \dots, n$)。设 $V = V(G)$, $V = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$, 以 D_i 为顶点集的 G 的导出子图用 $G_i = G(D_i)$ 表示, 导出子图是指, $[u, v] \in E(G_i)$ 当且仅当 $[u, v] \in E(G)$ 。设 $\sigma_k = (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{km})$, $\sigma_1 = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1q})$, q 整除 m 。称 G_k 与 G_l 简单邻接, 若 u_{kx} 与 u_{ly} 邻接当且仅当 $x = y \pmod{q}$ 。

情形 1

设 $|\sigma_2| > 5$, 我们先作 G' , 使 $\text{Aut} G' = \langle \theta \rangle$, 这里 $\theta = \sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_1 = (1, 2, \dots, m)$, $\sigma_2 = (\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{y})$ 。令 $E^* = \{[1, 2], [1, \overline{1}], [1, \overline{2}], [1, \overline{4}]\}$, $E(G') = \bigcup_{x=1}^m \theta^x(E^*)$, 这里 $\theta^x(E^*)$ 表示边集 $\{[\theta^x(i), \theta^x(j)] | [i, j] \in E^*\}$ 。显然 $\theta \in \text{Aut} G'$,

D_1 中顶点的度都是 5, D_2 中顶点的度都是 $3m/y$, 因此若 $\tau \in \text{Aut} G'$, 则 $\tau = \tau_1 \tau_2$, τ_1 是 τ 在 D_1 上的限制。

设 $\tau(1) = 1$, 由于 D_2 中与 1 邻接的顶点是 $\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}$, 因此 $\tau(\overline{2}) \in \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\}$ 。因为 $G_1 = 12 \dots m1$ 是一个圈, $\tau(1) = 1$, 因此 $\tau_1 = \varepsilon_1$ 或 $\tau_1 = (1)(2, m)(3, m-1) \dots$, 这里和以后用 ε_1 和 ε 分别表示 D_1 和 V 上的恒等置换。 D_2 中与 2、 m 邻接的点集分别是 $\{\overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\}$ 和 $\{\overline{y}, \overline{1}, \overline{3}\}$ 。若 $\tau(2) = m$, 则 $\tau(\overline{2}) \in \{\overline{y}, \overline{1}, \overline{3}\}$, 因此 $\tau(\overline{2}) = \overline{1}$ 。 D_2 中与 $m-1, 3$ 邻接的点集分别是 $\{\overline{y-1}, \overline{y}, \overline{2}\}$ 和 $\{\overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$,

$\tau(2) = m$, 则 $\tau(m-1) = 3$, $\tau(\overline{2}) \in \{\overline{3}, \overline{4}, \overline{6}\}$, 与 $\tau(\overline{2}) = \overline{1}$ 矛盾, 因此 $\tau = \varepsilon_1$, 同理 $\tau_2 = \varepsilon_2$, 这说明由 $\tau(1) = 1$ 可推出 $\tau = \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

设 $\tau(1) = 1 + i$, 则 $\sigma^{-i}\tau(1) = 1$, $\theta^{-i}\tau = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\tau = \theta^i$, 即 $\text{Aut } G'$ 中任意元是 θ 的幂, 因此 $\text{Aut } G' = \langle \sigma \rangle$ 。现在我们要在 G' 的基础上作 G , 使 $\text{Aut } G = \langle \sigma \rangle$ 。令 $G_i = G(D_i)$ 是零图 (任意两点都不邻接的图) ($i = 3, 4, \dots, n$), 我们把 σ_i ($i = 3, 4, \dots, n$) 重新编序 (同时也把 G_i 的顺序作相应变动), 设 $\{\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_n\}$ 中有 k_3 个轮换的长为 $|\sigma_3|$, 把它们编为 $\sigma_{3_1}, \sigma_{3_2}, \dots, \sigma_{3_{k_3}}$ 。又把 $\{\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_n\} \setminus \{\sigma_{3_1}, \sigma_{3_2}, \dots, \sigma_{3_{k_3}}\}$ 中长度最大的一个编为 σ_{4_1} , 与 $|\sigma_{4_1}|$ 长度相等的依次编为 $\sigma_{4_2}, \sigma_{4_3}, \dots, \sigma_{4_{k_4}}$, 这样类推得 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_{3_1} \sigma_{3_2} \dots \sigma_{3_{k_3}} \sigma_{4_1} \sigma_{4_2} \dots \sigma_{4_{k_4}} \dots \sigma_{s_1} \sigma_{s_2} \dots \sigma_{s_{k_s}}$ 。令 G_1 与 G_{x_1} ($x = 3, 4, \dots, s$) 简单邻接, G_{x_y} ($x = 3, 4, \dots, s, y = 1, 2, \dots, k_x - 1$) 与 $G_{x, y+1}$ 简单邻接, 这样得到的图用 G 表示。若将 D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 中的顶点等同为一个顶点, 则这个图如图 1 所示。显然有 $\sigma \in \text{Aut } G$ 。

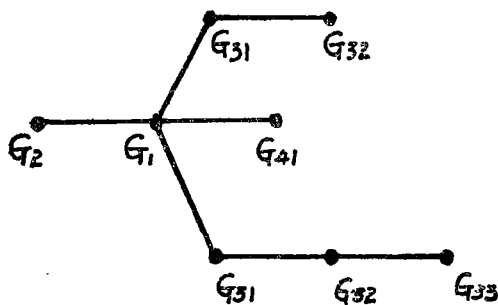


图 1

设 $\overline{D} = V - D_1 \cup D_2$ 。根据 G 的作法, 若 $u \in D_1 \cup D_2$, 则存在 $D_1 \cup D_2$ 中的两个点 u_1, u_2 , 使得 uu_1u_2u 是一个三角形 C_3 。若 $v \in \overline{D}$, 则 v 不是 G 的三角形的顶点。因此, 若 $\tau \in \text{Aut } G$, 则 $\tau = \tau' \overline{\tau}$, τ' 和 $\overline{\tau}$ 分别是 τ 在 $D_1 \cup D_2$ 和 $\overline{D}$ 上的限制, $\tau' \in \text{Aut } G'$, τ' 把 D_1 的顶点变为 D_1 的顶点。

设 $u \in V(G_{i1})$, $v \in V(G_{j1})$, $i \neq j$, 则与 u 邻接的 D_1 中的顶点的个数和与 v 邻接的 D_1 中的顶点的个数不相同, 因 $\tau(V_{i1}) = V_{i1}$ ($i=3, 4, \dots, s$), 这里 $V_{i1} = V(G_{i1})$ 。由 $\tau = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau$ 易推出 $\tau = \varepsilon$ 。

设 $\tau = \overline{\theta \cdot \tau}$, 则 $\sigma^{-1}\tau = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \overline{\varphi} = \varepsilon$, 因此, $\tau = \sigma^i$, $\text{Aut} G = \langle \sigma \rangle$

情形 2

设 $|\sigma_2| \leq 5$, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_{2,1} \sigma_{2,2} \cdots \sigma_{2,k_2} \sigma_{3,1} \sigma_{3,2} \cdots \sigma_{3,k_3} \sigma_{4,1} \sigma_{4,2} \cdots \sigma_{4,k_4} \sigma_{5,1} \sigma_{5,2} \cdots \sigma_{5,k_5}$, $|\sigma_{i,j}| = i$ ($i = 2, 3, 4, 5$), $k_i \geq 0$, 若 $k_i = 0$, 则表示除 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 外, σ 没有长度为 i 的轮换。

设 $\sigma_1 = (1, 2, \dots, m)$, $\sigma_2 = (\overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{y})$, $\sigma_3 = (\overset{\circ}{1}, \overset{\circ}{2}, \dots, \overset{\circ}{q})$, $y=3, 4, 5$. 若 $y=3, 5$, 则 $q=y$, 若 $y=4$, 则 $q=4$ 或 2 , 即 σ 满足定理 1 的条件 2) 和 3)。

设 $\theta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, 我们作图 G' , 使 $\text{Aut} G' = \langle \theta \rangle$. 令 $E^* = \{[1, 2], [\overline{1}, \overline{1}], [1, \overline{2}], [1, \overset{\circ}{1}], [\overline{1}, \overset{\circ}{1}]\}$, $E(G') = \bigcup_{x=1}^m \theta^x(E^*)$.

设 $D_i = V(\sigma_i)$ ($i=1, 2, 3$), 则 D_i 中顶点的度都相同, 用 d_i 表示.

设 $q \neq 2$, 则 $d_1 = 5$, $d_2 = 2m/y + 1$, $d_3 = m/y + 1$.

设 $q=2$, 则 $d_1 = 5$, $d_2 = m/2 + 1$, $d_3 = m/2 + 2$. 若 d_1, d_2, d_3 中没有相同的, 则 $\text{Aut} G$ 的任意元 $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3$, τ_i 是 τ 在 D_i 上的限制. 在 $q \neq 2$ 时, 若 $d_1 = d_3 = 5$, 则 $d_2 > 5$, D_1 中每个顶点与两个度为 d_2 的点邻接, D_3 中每个点只与 1 个度为 d_2 的点邻接, 因此仍有 $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3$.

设 $d_1 = d_2$, 与 1 和 $\overline{1}$ 邻接的点集分别是 $F = \{\overline{1}, \overline{2}, 2, m, \overset{\circ}{1}\}$ 和 $\overline{F} = \{\overset{\circ}{1}, 1, m, y, y+1\}$, $G(F)$ 有 3 条边, $G(\overline{F})$ 有 4 条边, $G(F)$ 与 $G(\overline{F})$ 不同构, 因此, $\tau(1) \neq \overline{1}$, 即 τ 不会把 D_1 中的点变为 D_2 中的点, 因此 $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3$. 在 $q=2$ 时, $y=4$, $m \neq 6$, 因此 $d_3 \neq 5$.

设 $d_1 = d_2$, 与前面论证同理可证 $\tau = \tau_1 \tau_2 \tau_3$. 现证 $\text{Aut} G' = \langle \theta \rangle$, $\theta \in \text{Aut} G'$ 是显然的.

设 $\tau \in \text{Aut} G'$, $\tau(1) = 1$, $\overset{\circ}{1}$ 是 D_3 中与 1 邻接的唯一顶点, 因此 $\tau(\overset{\circ}{1}) = \overset{\circ}{1}$. 同理, 若 $q \neq 2$, 则 $\tau(\overline{1}) = \overline{1}$. 若 $q=2$. 则 $y=4$, D_2 中与 $\overset{\circ}{1}$ 邻接的点是 $\overline{1}$ 和 $\overline{3}$, 所以 $\tau\{\overline{1}, \overline{3}\} = \{\overline{1}, \overline{3}\}$, D_2 中与 1 邻接的是 $\overline{1}$ 和 $\overline{2}$, 所以 $\tau(\overline{1}) \in \{\overline{1}, \overline{2}\}$, 因此仍有 $\tau(\overline{1}) = \overline{1}$. 与 m 和 2 邻接的 D_2 中的点集分别是 $\{y, \overline{1}\}$ 和 $\{\overline{2}, \overline{3}\}$, 因此 $\tau(m) \neq 2$, $G_1 = 12 \dots m1$ 是一个圈, 因此 $\tau(m) = m$, $\tau_1 = \varepsilon_1$. 同理可证 $\tau_2 = \varepsilon_2$, $\tau_3 = \varepsilon_3$, 即由 $\tau(1) = 1$ 可推出 $\tau = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, 因此 $\text{Aut} G' = \langle \theta \rangle$. 设 $V(\sigma_{ij}) = D_{ij}$, $G_{ij} = G(D_{ij})$ 是零图 ($i=2, 3, 4, 5$, $j=1, 2, \dots, k_i$) 令 G_1 与 G_{i1} ($i=2, 3, 4, 5$) 简单邻接, 令 G_{ij} 与 $G_{i,j+1}$ ($j=1, 2, \dots, k_i-1$) 简单邻接, 这样得到的图用 G 表示. 若把 D_i ($i=1, 2, 3$), D_{ij} 中的顶点等同为 1 个顶点, 则这个图如图 2 (此图中 $k_5 = 0$) 所示.

设 $\overline{D} = V - D_1 \cup D_2 \cup D_3$, 则 $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ 中每个顶点都在一个三角形上. 若 $u \in \overline{D}$,

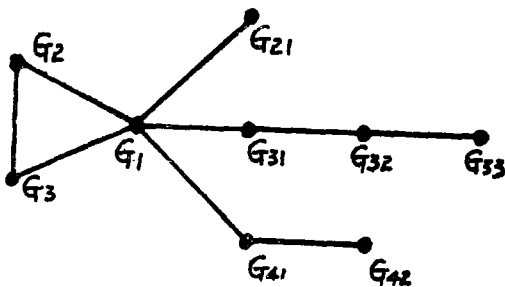


图 2

则 u 不是 G 的一个三角形的顶点。因此, 若 $\tau \in \text{Aut } G$, 则 $\tau = \tau' \bar{\tau}$, 这里, $\tau' \in \text{Aut } G'$, $\bar{\tau}$ 是 τ 在 $\bar{D}$ 上的限制, 与情形1的最后部分同理, 可证 $\text{Aut } G = \langle \sigma \rangle$ 。定理1充分性证毕。

引理2 设 $\theta = \theta_1 \varepsilon$, $\theta_1 = (1, 2, \dots, m)$, $\varepsilon = (\bar{1}) (\bar{2}) \dots (\bar{y})$, $m > 2, y \geq 0$, $\tau = (1) (2, m) (3, m-1) \dots \varepsilon$ 。如果 $\theta \in \text{Aut } G$, 则 $\tau \in \text{Aut } G$ 。

证明: 对于 G 的任一条边 $[u, v]$, $[\tau(u), \tau(v)]$ 也是 G 的边。设 $[i, i+j] \in E(G)$ 。因为 $\theta^{2+m-2i-j}(i) = 2+m-i-j$, $\theta^{2+m-2i-j}(i+j) = 2+m-i$, (运算按模 m 进行), 所以 $[2+m-i, 2+m-i-j] \in E(G)$ 。 $2+m-i = \tau(i)$, $2+m-i-j = \tau(i+j)$, 即 $[\tau(i), \tau(i+j)] \in E(G)$ 。

设 $[i, \bar{j}] \in E(G)$ 。因为 $\theta^{2+m-2i}(i) = 2+m-i$, $\theta^{2+m-2i}(\bar{j}) = \bar{j}$, 所以 $[2+m-i, \bar{j}] \in E(G)$, 即 $[\tau(i), \tau(\bar{j})] \in E(G)$ 。若 $[\bar{i}, \bar{j}] \in E(G)$, 则 $[\tau(\bar{i}), \tau(\bar{j})] = [\bar{i}, \bar{j}] \in E(G)$ 。证毕。

系1. 设 $\theta = (1, 2, \dots, m) (\bar{1}) (\bar{2}) \dots (\bar{y})$, $m > 2, y \geq 0$, 则 $\langle \theta \rangle$ 是不可图的。

系2. 设 $\theta = (1, 2, \dots, m) (\bar{1}) (\bar{2}) \dots (\bar{y})$, $m > 2, y \geq 0$ 。如果 $\theta \in \text{Aut } G$, 则 $\tau' \in \text{Aut } G$ 。这里 $\tau' = (s_1, t_1) (s_2, t_2) (s_3, t_3) \dots, s_1 + t_1 = s_2 + t_2 = \dots \pmod{m}$, 若 $s_i = t_i$, 则将 (s_i, t_i) 记为 (s_i) 。

证明: 因为 τ' 是由 θ 和 τ 生成的群 $\langle \theta, \tau \rangle$ 中的一个元素。

引理3 设 $\theta = \theta_1 \theta_2$, $\theta_1 = (1, 2, \dots, m)$, $\theta_2 = (\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{y})$, $m = ky > 2$ 。若 $y \leq 5$, 则 $\langle \theta \rangle$ 是不可图的。

证明 若 $y = 0$ 或 1 , 则由系1, $\langle \theta \rangle$ 是不可图的。设 $y = 2$ 。若 $\theta = (1, 2, \dots, m) (\bar{1}, \bar{2}) \in \text{Aut } G$, 我们证明 $\tau = (1) (2, m) (3, m-1) \dots (\bar{1}) (\bar{2}) \in \text{Aut } G$ 。引理2的证明中已证 τ 将 G_1 的边变为 G_1 的边 ($i = 1, 2$)。若 $[1, \bar{1}] \in E(G)$, 则 $[i, \bar{1}] \in E(G)$, 这里 i 为奇数。 $\tau(i)$ 为奇数, 故 $[\tau(i), \tau(\bar{1})] = [\tau(i), \bar{1}] \in E(G)$ 。因此 $y = 2$ 时, $\langle \theta \rangle$ 不可图。设 $y = 5$ 。 $\theta = (1, 2, \dots, m) (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}) \in \text{Aut } G$ 。若 G_1 中的点与 G_2 中的点不邻接, 则 $\varepsilon_1 (\bar{1}) (\bar{2}, \bar{5}) (\bar{3}, \bar{4}) \in \text{Aut } G$ 。若 G_1 中的1个点与 G_2 中的1个点邻接, 不妨设1与 $\bar{1}$ 邻接, 则 $(1) (2, m) (3, m-1) \dots (\bar{1}) (\bar{2}, \bar{5}) (\bar{3}, \bar{4}) \in \text{Aut } G$ 。若 G_1 中的1个点与 G_2 中的两个点邻接。设1与 $\bar{i}, \bar{j}$ 邻接, 则 $(1) (2, m) (3, m-1) \dots (\bar{i}, \bar{j}) (\bar{i}-1, \bar{j}+1) (\bar{i}-2) \in \text{Aut } G$ 。

(若 G_1 中的1个点与 G_2 中的3(或4, 5)个点邻接, 则在 G 的补图 $\bar{G}$ 中, G_1 的1个点与 G_2 的2(或1, 0)个点邻接), 因此 $y = 5$ 时, $\langle \theta \rangle$ 不可图。当 $y = 3, 4$ 时, 类似 $y = 5$, 可证 $\langle \theta \rangle$ 不可图。

定理1必要性的证明。根据引理2和引理3,我们只要证明 $n \geq 3$ 的情形。我们证明,若 σ 不满足定理1中的条件,则 $\langle \sigma \rangle$ 不可图。这时 $\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, \dots, |\sigma_n|\}$ 只能是下列情形之一:

- 1) $\{m, 5, 2, \dots, 2\}$
- 2) $\{m, 3, 2, \dots, 2\}$
- 3) $\{m, 2, 2, \dots, 2\}$
- 4) $\{m, 5, 3, 2, \dots, 2\}$
- 5) $\{m, 5, 4, 3\}$
- 6) $\{m, 5, 4\}$
- 7) $\{m, 5, 3\}$
- 8) $\{m, 4, 3\}$

设 $\tau_1 = (1) (2, m) (3, m-1) \dots$, $\tau_2 = (\overline{i}) (\overline{i-1}, \overline{i+1}) (\overline{i-2}, \overline{i+2})$, $\tau_3 = (\overset{\circ}{j}) (\overset{\circ}{j-1}, \overset{\circ}{j+1})$, $\tau_4 = (\hat{t}) (\hat{t}+1) (\hat{t}+2, \hat{t}-1)$, $\tau_5 = (\hat{k}, \hat{k}+2) (\hat{k}+1) (\hat{k}-1)$ 。设 $\sigma_1 = (1, 2, \dots, m)$ $\sigma_2 = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5})$ $\sigma_3 = (\overset{\circ}{1}, \overset{\circ}{2}, \overset{\circ}{3})$, $\sigma_4 = (\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4})$ $\sigma_5 = (u_1, u_2) (s_1, s_2) \dots (t_1, t_2)$ 。我们指出,若 σ 是上述8种情形之一,且 $\sigma \in \text{Aut}G$,则有 $\tau \in \text{Aut}G$,而 $\tau \notin \langle \sigma \rangle$,因此 $\langle \sigma \rangle$ 是不可图的,而 $\tau \in \text{Aut}G$ 的证明类似于前面定理的证明。现指出如下。

情形1) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_5$, 则存在某个 i , 使 $\tau_1 \tau_2 \in \text{Aut}G$ 。

情形2) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_5$, 则存在某个 j , 使 $\tau_1 \tau_3 \in \text{Aut}G$ 。

情形3) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_5$, 则 $\tau_1 \in \text{Aut}G$ 。

情形4) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_5$, 则存在 i, j , 使 $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \in \text{Aut}G$ 。

情形5) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_5$, 则存在 i, j, t, k , 使 $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \in \text{Aut}G$, 或 $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_5 \in \text{Aut}G$ 。

情形6) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4$, 则存在 i, t , 使 $\tau_1 \tau_2 \tau_4 \in \text{Aut}G$, 或存在 i, k , 使 $\tau_1 \tau_2 \tau_5 \in \text{Aut}G$ 。

情形7) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$, 则存在 i, j , 使 $\tau_1 \tau_2 \tau_3 \in \text{Aut}G$ 。

情形8) 设 $\sigma = \sigma_1 \sigma_4 \sigma_5$, 则存在 j, t, k , 使 $\tau_1 \tau_3 \tau_4 \in \text{Aut}G$ 或 $\tau_1 \tau_3 \tau_5 \in \text{Aut}G$ 。

证毕

定理2的证明。设 $\langle \theta \rangle$ 是 P^r 阶群, 则 σ 的轮换的长度都是形状为 P^m 的数, $0 \leq m \leq r$ 。由一个轮换生成的群是不可图的。若 $\langle \sigma \rangle$ 可图, 则 σ 至少有2个长度大于1的轮换。根据定理1的证明, σ 至少有2个长度大于2的轮换, 若 σ 恰有2个长度大于2的轮换, 则这2个轮换的长度都大于5。反之, 若 $\langle \sigma \rangle$ 满足定理2的条件, 则 $\langle \sigma \rangle$ 满足定理1的3个条件之一, 因此 $\langle \sigma \rangle$ 是可图的。

参 考 文 献

- [1] J.N.Kagno, Linear graphs of degree ≤ 6 and their groups, Amer. Jour.Math., 68 (1946), 505—520
- [2] C.Y.Chao, On a theorem of Sabidussi, Proc.Amer.Math.Soc., 15 (1964), 291—292
- [3] S.P.Mohanty, M.R.Sridharan and S.K. Shukla, Graphical cyclic permutation groups, Combinatorics and Graph Theory (ed.S.B.Rao), Lecture Notes in Math. 885, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 339—346

On Graphical Cyclic Permutation Groups

Zhou Shangchao

Abstract

A permutation group H acting on a set X is said to be graphical if there is a graph G such that $\text{Aut}G$, The automorphism group of G , is identical to H . By cyclic form of a permutation σ on a set V , We mean its representation as a product of disjoint cycles (including cycles of length one). Here we find a necessary and sufficient condition for the permutation group generated by a permutation σ to be graphical, where the cyclic form of the permutation σ consists of n cycles of lengths $m_1, m_2, \dots, m_n$ such that m_i divides m_1 ($i=1, 2, \dots, n$). Our results are obtained by constructing certain graphs. We also find a necessary and sufficient condition for cycle permutation groups of order p^n to be graphical where p is a prime.

Key words: graph; automorphism group; cyclic group