

# 张量的哲学思考

兰毅辉

(社会科学部)

## 摘要

本文讨论了物理实在的数学描写形式——张量的哲学内含。认为协变张量反映着自然界的物质实在，高秩张量更深刻、更精确地反映物理实在，同时，高秩张量还反映着自然界的高度统一。物理规律必须表示成张量方程形式。文中还探讨了物理学研究中主体性问题。

**关键词：**张量；变换；不变性；客观性；主体性

在相对论中有这样一条基本原理：基本物理定律必须取张量方程的形式。为什么张量在研究物质运动规律中得到如此青睐？是有其根本原因的。

## 1 张量分析的渊源

张量分析的研究在数学上是承自微分不变量的研究。不变量的问题是对客观自然界进行长期考察、研究所提出来的问题，最为简单的不变量问题是流形的几何性质的不变量问题。人们都清楚地知道，流形可以用不同的坐标表示。然而，流形的几何性质应该与用来研究它的坐标系无关。从分析上来说，这些几何性质将由不变量表示。所谓不变量就是一个表达式，其形式在坐标变换下不变。因此，在不同的坐标系中它在一个给定点有相同的值。

随着物理学的发展，变化、运动的问题日益受到重视，为研究自然界中复杂多变的问题，在数学上创立了微积分学这种数学描写工具。因此，在不变量的研究方面，从几何性质的不变量问题进一步概括、拓展成微分不变量问题的研究。微分不变量研究的目的是为几何性质和物理规律的表示式寻找一种在坐标变换下不变的形式。例如二维情形，设

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

如果坐标变换成

$$u' = f(u, v), \quad v' = g(u, v)$$

则 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 变成

$$ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

同时， $ds^2$ 的高斯曲率 $k$ 变成 $ds'^2$ 的高斯曲率 $k'$ ，且有 $k = k'$ ， $k$ 和 $k'$ 的表达式相同。因此，

本文于1992年元月20日收到

称 $ds^2$ 是个不变量， $k$ 是不变量。随着微分形式的不变量问题研究的深入和发展，结果形成了一个全新的数学分支，这一数学分支由爱因斯坦于1916年命名为张量分析。<sup>①</sup>

张量分析技术能应用于物理学研究，这是由张量分析研究的目的所决定的。但是，张量分析在物理学中得到实际和广泛的应用则是由爱因斯坦完成。例如，爱因斯坦相对论中的相对性原理指出，所有惯性参考系对自然的描述是等效的。每一个惯性参考系在数学上不过是一个坐标系，不同坐标系可用坐标变换加以联系。所以，自然规律的等效性实际上是数学意义下的关于坐标变换的不变量，这种不变量问题正是张量分析所研究的内容。因此，爱因斯坦就把张量分析工具引进到相对论研究中，并由此促进了张量分析的发展。

## 2 张量是客观世界的有效描述工具

在牛顿力学中，各种基本物理量不是标量就是矢量，如时间、距离是标量，位置、位移是矢量，等等。标量、矢量和张量貌似不同，而实际上，标量和矢量也是张量，是低秩张量，标量是0秩张量，矢量是1秩张量。这样，可以概括地说，任何基本的物理量都可用张量表示，当用这些基本的物理量来描述物质运动规律时，物理定律也必然采用张量方程的形式。

为什么张量能表示基本的物理量？谁都知道，物理学是研究物质物理运动规律的科学，任何基本的物理量是客观世界中各种事物的某种属性的抽象结果，如质量、力等。所以，基本的物理量都表示着一种物理实在，这就要求着作为描写基本物理量的数学形式也必须是表示着一种物理实在。实际情况如何呢？

客观世界中的物理实在是复杂多样的，具有许多不同的侧面，这些侧面相互联系、相互制约形成一个总体的物理实在，而且这些不同的侧面又各有自己的特性。这就要求着表示物理实在的符号必然反映复杂的物理实在的不同侧面及其联系和区别的性质。张量具有许多个分量（除标量以外，标量只有一个分量），这些分量是相互独立，但又有联系，只有这些分量的集合总体才是一个张量。张量的这种特点正好符合物理实在对描述符号的要求，对应地，张量的分量反映物理实在的不同侧面，全部分量的集合——张量反映了全部侧面的全体——物理实在。例如，经典电磁场理论中的电场强度这个物理实在就是用三维空间中的1秩张量（或曰矢量） $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ 来表示。 $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$ 是张量 $\vec{E}$ 的三个分量，分别反映电场在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个相互垂直方向上电场强度的强弱分布情况。也就是说，空间上任一点的电场强度的大小和方向完全地用 $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ 表示出来。

仅从上面要求来说，似乎有多个分量的任何量就能用来描述物理实在，实际不然。物理实在及其反映该物理实在的不同侧面都是客观的，从不同的角度、不同的参照系（用数学分析的语言来说，就是不同的坐标系）观察物理实在时，虽然物理实在的不同侧面在量度上会发生一定的变化，但在质上是不会改变的。质的不变性制约着量度变化的规律。所以，物理实在其不同侧面在量度关系上的变化不会因从不同的角度观察而发生杂乱无章的变化，必然遵循一定规律发生变化。从张量分析的发展历史可以看出，张量引入正是应物理实在的这种客观特性的要求而引入的。在数学上，张量是这样定义的：

设有坐标变换 $T: y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ 在 $x$ 下有一组函数 $\{f_i(x^1, \dots, x^n)\}$ 在变换 $T$ 下变为 $\{g_i(y^1, \dots, y^n)\}$ ，由 $T$ 引起的把 $f_i$ 变为 $g_i$ 的相应变换记为 $G$ ， $G$ 是 $T$ 的函数，叫做 $T$ 在 $f_i$ 上的

导出变换。如果G满足下列条件:

(a) T为恒等变换时, G也是恒等变换, 即当 $y^i = x^i$ 时, 有 $f_i(x^1 \cdots x^n) = f_i(y^1 \cdots y^n)$ ;

(b) 设 $T_1$ 均为T型的变换,  $G_1$ 为相应变换, 若 $T_3 = T_2 T_1$ , 则有 $G_3 = G_2 G_1$ , 即T与G同构。如函数集 $\{f_i\}$ 满足条件(a)和(b), 则 $\{f_i\}$ 构成一个 $x$ 中以 $f_i$ 为分量的张量。

从定义可以看出, 定义张量的出发点正是在于其变换过程中的变换关系。张量是这样一些量, 它们从一个参照系转换到另一个参照系时有一定变换规律。张量分析中有这样一条定理: 若一张量的分量在某一坐标系中均为零, 则必在其他坐标系中也均为零, 这是符合客观现实的。任何的物理实在在一个参照系中表现为无, 则不可能在另一参照系中表现出有, 即不可能无中生有。张量变换下的规律性决定着它能用来描述物理实在。例如, 经典电磁场理论中的张量 $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ 满足三维空间中的伽利略变换规律。所以, 张量 $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ , 是描写电场的电场强度的好量, 即 $\vec{E}$ 真实反映电场强度。

张量中的0秩张量——标量有它的特殊性, 它是参照系变换下的不变量, 即 $\phi = \phi'$ , 这反映了标量所反映的物理实在的绝对性, 即任何参照系下的不变性、永恒性。例如电子的电荷, 不论从哪个参照系来测量它, 都是 $e = 4.80 \times 10^{-10}$ CGSE单位, 反映电子电荷的绝对性。

张量的秩数越大, 张量的分量越多, 对复杂的物理实在描写就越全面、精确。另一方面, 高秩张量还可以把几个低秩张量融为一体, 由此反映出自然界的高度统一。例如, 经典电磁场理论中, 电场强度和磁场强度分别是个矢量, 独自地描述电场和磁场强弱和分布状况的客观实在。然而在相对论电动力学中, 电场强度和磁场强度已不再是矢量了, 而是统一成为一个四维空间中的2秩张量, 这一点正反映电磁的统一性。可见, 高秩张量反映自然界的统一性, 高度统一的理论必须用更高秩的张量描写。

把几个低秩张量统一描写成一个高秩张量, 一方面体现自然界的高度统一, 另一方面也提高了对物理实在的认识深度, 就是说, 高秩张量能更深刻、更正确地反映物理实在。例如在经典力学中, 由于把时空结构理解为三维欧氏空间和独立的一维时间, 因而把三维长度和时间间隔看成是标量, 表明空间长度和时间间隔的绝对性, 这就是牛顿的绝对时空观念。但是, 在狭义相对论中, 时空是四维闵可夫斯基结构, 三维长度和时间间隔不再是标量, 而是统一为一个四维矢量, 矢量在参照系变换下按洛伦兹变换规律变化, 说明空间长度和时间间隔的相对性, 这就是爱因斯坦的相对时空观念, 这一观念已得到了证实。可见, 相对时空观比绝对时空观更深刻、更精确地反映时间和空间的物理实在。

总之, 张量能正确反映自然界的物理实在, 高秩张量反映着自然界的高度统一, 更高秩的张量反映更高度的统一, 另一方面, 高秩张量能更深刻、更精确地反映物理实在。

### 3 张量方程是描述物理规律的有效数学形式

对于反映物质运动规律的张量方程来说, 因为自然界的和谐统一是内在客观的, 不因观察的角度不同而发生改变。如果说某一张量方程在参照系变换下其原来的简洁形式的基本定律变成了乱七八糟的形式, 而不保持原来的形式, 说明该张量方程没有正确反映物质运动规律, 甚至完全是错误的。所以, 自然界的和谐统一的内在客观性决定着反映物质运动规律的

张量方程在参照系变换下是不变的，即坐标变换下的张量方程与变换前的张量方程的形式一样简洁、优美。

这种在坐标变换下的不变性也充分说明了，一个张量或张量方程在一个坐标系中所具有的物理的、几何的、甚至纯数学的意义通过坐标变换在第二个坐标系中仍然具有这些意义，这个性质在物理学中有重要的意义。虽然每一个观测者都有他自己的坐标系，但因为客观的物理规律是对所有观测者都成立的规律。所以，为了反映坐标系的这种无关性，物理规律必须都表示成张量形式。

#### 4 客观性是物理学研究的根本出发点和最终目标

近年来，在学术界展开了一场现代物理学研究中认识的主体性问题的讨论。关于主体性是否介入到认识过程中，已有了共识，答案是肯定的。但是，在关于认识结果中有无主体性因素存在的问题上，颇有分歧，成为这场讨论的焦点之一。

客观性是物理学研究的根本出发点，对于这个问题大家都不会有什么疑议的，实际上，这也是认识的反映论的基本要求和必然结果。对于真正的物理学家来讲，把自己的研究对象看成是不以人的意志为转移的客观存在，一般是不成问题的，这正是他们的自然科学唯物主义的基本精神的具体表现。这是从研究对象的客观性方面来说，同样，在研究的工具、方法和描写语言方面也是如此，以客观性为根本出发点。下面以科学理论的描写语言的选择作一说明。

数学作为正确的科学的描写语言已获得普遍共识。那么，数学的客观性如何呢？这是数学家和哲学家长期探索并有争议的一个问题，有的认为，纯数学产生于纯思维；有的认为，纯数学是某种起源于经验，是来自外部世界后又脱离外部世界的东西，等等。实际上，数学的发展历史事实和数学的应用历史事实告诉我们，数学是对现实世界的能动反映。本文中讨论的张量分析就是个典型事例。

作为纯数学理论的发展，张量分析是在研究客观事物的性质及其运动规律的基础上提出来的数学问题，并以客观事物的性质及其运动规律为根据来定义张量。具体地说，人们认识到事物的性质及其运动规律是客观的，不以人的意志为转移的，不会因为人的观察角度不同而发生变化。这种客观性质转换用数学的语言来说，就是描写事物的性质及其运动规律的数学量和数学形式不会因坐标系的变换而发生改变，即是坐标变换下的不变量，以此为基本思想定义了张量（如前所述），由此开始了张量分析这一分支学科的发展。

张量分析技术也是以事物的客观性质及其运动规律为出发点和中介才获得应用的。爱因斯坦在“广义相对论的基础”一文中对物理客体的运动进行考察后得出，“物理学的定律必须具有这样的性质，它们对于以无论哪种方式运动着的参照系都是成立的。”“普遍的自然规律是由那些对一切坐标系都有效的方程来表示的，也就是说，它们对于无论哪种代换（坐标的变换）都是协变的（广义协变）。”等结论。因此，爱因斯坦认为，“广义相对性公设导致这样的要求，即物理方程组对于 $x_1 \cdots x_4$ 的任何代换都必须是协变的，现在我们就必须考虑怎样才能得到这种广义协变方程。”“通过对张量形成规则的考查，我们就得到了建立广义协变定律的方法。”<sup>④</sup>可见，爱因斯坦选择张量作为相对论的描写语言是看到了物理客体的性质

及其运动规律与张量赖以建立的客观性基础的一致性。正是由于双方在客观性问题上的一致性才使得张量成为相对论的描写语言。这一点充分说明了, 物理学研究是以客观性为根本出发点。

既然主体性介入到认识过程中, 所以, 认识结果也必然包含有主体性因素, 这也是不可否认的事实, 否则, 就不可能存在对同一问题的认识有极不相同意见并存的现象。正是由于认识结果中残留有主体性因素, 才使得认识结果的真实性既有绝对真理的一面, 又有相对真理的一面。所谓相对真理是指, 任何真理都依赖于主体、依赖于人和人类的主观形式, 它不是客观事物及其规律本身, 而是主观和客观对立中的统一。因此, 每一真理都具有近似的、不完善的性质, 都是对无限发展的物质世界在有限范围内和有限程度上所作的正确反映。可见, 认识结果的相对真理性的内含反映了主体性因素在认识结果中的比重问题。相对真理向绝对真理的逼近是逐步消除认识结果中主体性因素的过程。

例如, 相对论中“运动物体收缩”和“运动时钟变慢”的结果体现了主体性因素的存在。在四维时空中存在着不依赖惯性坐标系的“时空间隔”, 三维空间的长度和时间是这四维的“时空间隔”在某一三维的惯性坐标系上的投影, 选择不同的三维惯性坐标系, 投影的大小不一样, 即三维惯性坐标系的变换引起投影大小的变化, 这种投影大小的变化就是所谓的“运动物体收缩”和“运动时钟变慢”。由此可见, “钟变慢、尺缩短”结论中的主体性因素是三维惯性坐标系的选择, 这种选择的主体性因素的存在使得三维惯性系中的时空概念不能正确反映物理客体的运动性质。所以, 必须把三维的时空统一为一个“四维时空间隔”的概念来描写, 以消除坐标系选择的主体性因素的影响。即在数学上用四维矢量来统一描写两个三维的长度和时间间隔的标量, 更好地反映物理客体的运动属性, 向认识的客观性更迈进一步。

可见, 任何认识结果都有主体性因素存在, 问题只在于主体性因素多寡的问题, 这决定了认识结果的相对真实性的一面。相对真理向绝对真理逐步逼近是逐步消除主体性因素的过程, 使认识结果更具客观性。客观性是物理学研究的最终目标。

### 参 考 文 献

- [1] M·克莱因. 古今数学思想(第四册). 上海: 上海科技出版社, 1979
- [2] 陆传务, 林化夷. 矢量和张量及其应用. 武汉: 华中工学院出版社, 1983: 63
- [3] 爱因斯坦. 爱因斯坦文集(第二卷). 北京: 商务印书馆, 1983
- [4] 何祚庥. 分歧在哪里?. 中国社会科学, 1991, 57~72
- [5] 柳树滋. 现代物理学与认识的主体性. 中国社会科学, 1991, 99~108

## Pondering Over Tensors in Philosophy

Lan yihui

### Abstract

The essay studies the philosophical content of tensors——mathematical descriptive form of a physical realia. The conclusion is that, covariant tensors really reflect a physical realia in the nature, the higher tensor order is, the more deeply and precisely tensors reflect a physical realia, and higher order tensors also reflect higher unitary of the nature. A physical rule must be described as a tensor equation form. The essay also discusses the question of subjectivity in physical researcher.

**Key words:** tensor; transformation; constance; objectivity; subjectivity