

谈谈高等数学中的辩证法

龚代华

朱静萍

(基础课部)

(江西财经学院)

摘 要

本文列出了高等数学中部分概念所包含的哲学思想并举例作了具体分析。

关键词: 数学哲学

马克思主义哲学是关于客观规律的一般科学,是现代最新科学技术的高度概括,因而对于各门具体学科有指导作用。它的深刻思想贯穿于各学科中,作为自然科学皇冠的数学也不例外,数学中的许多概念、定理都包含着深刻的哲理。正如恩格斯所说:“高等数学的主要基础之一就是矛盾……,就是初等数学也充满矛盾。……”^①如函数的复合与分解、微分与积分、连续与间断、收敛与发散,有界与无界,有限与无限、无穷小与无穷大、近似值与精确值、函数的单调升与单调降……都是一对对矛盾。数学充满矛盾,因而也充满活力,一切数学问题、悖论都是数学的矛盾。数学的问题有三个来源:一是社会实践中提出的数学问题;二是自然科学中提的数学问题;三是数学内部提出的数学问题。^②这三类问题在数学中都可归结为论证一个命题与否定一个命题(例如,解是否存在?是否可求解?定理是否成立?……),从而以肯定和否定这两种确定性去取代问题的不确定性。我们认为否定也是一种肯定,否定一部分即是肯定了其对立的部分,这就是事物发展的否定之否定规律,解决一个问题就是为了清楚地划分肯定与否定之界线。如果现有数学理论能解决这些问题,毫无疑问这些问题的解决有助于完善现有数学体系。如果现有的数学理论解决不了这些问题,也就是说这些问题必须借助新的数学工具才能得到解决,因此,一旦问题得到解决,新的数学也将随之而诞生,数学由此向前迈进了一大步。最有说服力的例子便是三次数学危机的解决导致数学的高速发展。第一次数学危机的解决导致了《原本》及公理化的诞生;第二次数学危机的解决使人们建立了严密的极限理论;第三次数学危机的解决则导致了Zermelo—Fraenkel公理集合论系统的建立。虽然第三次危机至今没有令人满意的解决方法,这更说明数学的发展具有很大的动力,这种动力正是来源于矛盾。几千年的数学发展史和马克思主义哲学关于事物发展的原理都表明,正是矛盾推动着数学不断发展。矛盾是永远存在的,旧的矛盾解决,新的矛盾又会出现。矛盾是普遍的、绝对的,存在于事物发展的一切过程,又贯串于一切过程的始终^③。因此数学的发展永远没有完结,学习和研究数学就是要善于发现问题和解决问题,而提出的问题意义如何?解决问题的手段如何?则取决于我们是否能把握和运用数学规

本文于1991年10月18日收到

律，是否能进行科学思维。马克思主义哲学是关于自然，社会和思维发展的普遍规律的 科学，对于我们认识数学规律、掌握数学规律、运用数学规律和进行辩证思维具有很大的指导作用。如果我们在教学中以马克思主义哲学为指导思想并对数学哲学思想加以阐述，则既可加深同学们对概念、定义、定理的理解，激发其强烈的学习兴趣，亦可培养同学们自觉应用马克思主义哲学指导学习的良好习惯。下面具体分析部分高等数学概念所体现的哲学思想。

1 常量与变量——静止与运动

在某一过程中保持一定数值的量称为常量，而发生变化的量称为变量。常量与变量在哲学中表现为一对矛盾。常量即是静止，变量即是运动，马克思主义哲学告诉我们运动是绝对的，无条件的，而静止则是相对的，有条件的。事物只能在一定条件下才能呈现暂时的静止，这种条件在数学中表现为一定的数值范围，超出了这个范围常量也会发生改变而成为变量。

例1 质量为 m_0 的质点以速度 v 作变速直线运动，则动能 E 与 v 的关系为

$$E = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

当速度 v 比光速 c 小得多时，质量是一个常量，但当质点的运动速度接近光速 c 时，则质点的质量是一个变量，它随速度 v 的改变而改变。由相对论中的洛伦兹〔Lorentz〕公式有：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

这里 m_0 是质点的初始质量。由洛伦兹公式可以看出，当质点以比光速 c 小得多的速度运动时，质点的质量也在随速度而变化，但是这种变化是很小很小的，特别在宏观世界中。例如，2吨重的火箭以20公里/秒的高速运动，其质量只增加0.004克。由于质量改变很微小，故相对于我们所要求的精确度来说完全可以将其忽略不计而把它当作常量。但是不论质点运动速度如何，在绝对意义上质量仍是一个变量。

例2 定义在 $[0, 2)$ 上的函数

$$y = x[x] = \begin{cases} 0 & \text{当 } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{当 } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

y 在 $[0, 1)$ 上是常量，超出了这个范围便是变量，总的说来， y 是一个变量。

以上两例都表明了事物静止的相对性（相对于精确度，相对于某一区间）和运动的无条件性与绝对性。

2 函数、自变量与因变量——规律、矛盾的主要方面与次要方面

马克思主义哲学认为，矛盾推动事物发展变化，在这一变化过程中存在许多矛盾，这些矛盾既统一又相互斗争，这使得矛盾间的关系更加复杂化。当我们从数学角度去观察这一变

化过程时,就会发现在这个变化过程中存在着许多变量,这些变量不是孤立地变化,而是相互联系和某种程度上的相互制约。其中某一个变量(记为 x)会决定另一个变量的变化,而被决定的那个量(记为 y)则按一定规律随那个决定它的量变化而变化。变量间的这种关系在数学中称为函数关系,记为 $y=f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量。在哲学中,自变量和因变量是矛盾的两个方面,自变量 x 代表矛盾的主要方面,在矛盾的同一和斗争中居于支配地位,起着主导作用。事物的性质,主要地是由取得支配地位的矛盾的主要方面所规定的。④因变量 y 代表矛盾的次要方面,它受矛盾主要方面 x 的支配和制约。

例3 要作一个容积为 V 的无盖圆柱形容器,如何选取底半径 r 与高 h 使用料最省?

由公式 $V=\pi r^2 h$ 可以看出 r 、 h 是一对矛盾,其斗争性表现为:若 r 增大,则必然导致 h 减小,此时底面积($=\pi r^2$)增加,而侧面积($=\frac{2V}{r}$)减小。若 h 增大,则必然导致 r 减小,此时侧面积($=\sqrt{2\pi Vh}$)增加,底面积($=\frac{V}{h}$)减小。这对矛盾的同一性则体现在公式 $V=\pi r^2 h$ 之中。

由上述分析可以看出,在 r 、 h 的变化过程中,底面积与侧面积也是一对矛盾,而容器的表面积为底面积与侧面积之和,正是这对矛盾的不断相互排斥,相互对立使得容器表面积处于不断变化之中。当 r 从很小的值(靠近0的地方)逐渐增加时,圆柱表面积逐渐变小,这与侧面积的变化方向一致,故此时侧面积为矛盾的主要方面。当 r 增加至 $3\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ (此时 $h=3\sqrt{\frac{V}{\pi}}$)时,圆柱表面积最小⑤。当 r 超过 $3\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ 时,表面积又开始增加,这与底面积变化方向一致,而与侧面积变化方向相反,故此时底面积为矛盾的主要方面。因此当 $r=3\sqrt{\frac{V}{\pi}}$, $h=3\sqrt{\frac{V}{\pi}}$ 时,正是矛盾的主要方面与次要方面转化的一瞬间,正是在这一瞬间这对矛盾才呈现出暂时的同一性,对立的统一(一致,同一,合一),是有条件的、一时的、暂存的、相对的。互相排斥的对立斗争则是绝对的,正如发展、运动是绝对的一样⑥,在这个简单的数学例子中正是包含着这样一种深刻的哲理。

函数的对应关系 f 在哲学中则表示决定事物(变量)间联系的内在规律,客观规律即为真理。马克思主义哲学认为任何真理都是绝对真理与相对真理的统一,函数关系的客观性即是真理绝对性的表现,函数关系这个真理的相对性在数学中表现为分段函数。如恒温下气体压力 P 与体积 V 的函数关系为:

$$P = \begin{cases} \frac{k}{V} & \text{当 } V \geq V_0 \\ \frac{\gamma}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} & \text{当 } V < V_0 \end{cases}$$

这里 k , α , β , γ 都是常数。

当 V 在 $[V_0, +\infty)$ 中变化时, P 与 V 之间的关系称为波义耳—马利奥脱定律,当 V 在 $(0, V_0)$ 之间变化时, P 、 V 之间的关系为房特瓦定律。这两个定律在各自的区间上具有真

理的绝对性,但对整个 $(0, +\infty)$ 区间而言,这两个定律都是相对真理,正是这两个相对真理合在一起揭示了恒温下气体压力与体积之关系的绝对真理。要是考虑温度的变化,这个分段函数也具有相对性。因此,真理永远是绝对真理与相对真理的统一。

3 反函数——矛盾的转化

当且仅当 $y = f(x)$ 是严格单调函数时,其反函数 $x = \phi(y)$ 存在,此时 x 由自变量而变为因变量, y 则由因变量变为自变量。对于函数 $y = f(x)$ 而言, x 代表矛盾的主要方面, y 代表矛盾的次要方面,但反函数 $x = \phi(y)$ 表明: x 为矛盾的次要方面, y 为矛盾的主要方面,这意味着一旦求出 $y = f(x)$ 的反函数,矛盾便发生了转化,原来矛盾的主要方面下降为矛盾的次要方面,而原来矛盾的次要方面则上升为矛盾的主要方面。在这里反函数存在是矛盾转化的前提,而只有当函数满足严格单调这个条件时,反函数才存在。反函数的存在性表明:矛盾是可以转化的,但要以一定条件为前提。

4 跳跃间断点——量变与质变

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域里有定义且在除 x_0 以外的邻域中的每一点上都连续,又设 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限都存在,但 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 则 $f(x)$ 在 x_0 不连续, x_0 称为跳跃间断点。当 x 从 x_0 的左边趋近 x_0 时,不论 x 离 x_0 多么近, $f(x)$ 在 x 是连续的,即量变没有引起质变。但一旦 x 达到 x_0 时,函数在 x_0 便不连续,即函数的质发生了飞跃。此例表明只有量变到一定程度时才会引起质的飞跃。

5 反证法——否定之否定

一个数学命题要么成立,要么不成立,二者只居其一。因此,考察一个数学命题我们可以用肯定和否定这两种方式同时进行。有时要直接证明一个命题很困难,此时可以考察其否命题,如果能证明否命题不成立,即否定了这个命题的否命题,那么这个命题本身也得到了证明,这种方法在数学中称为反证法。反证法是马克思主义哲学的否定之否定规律在数学哲学中的具体表现,它充满着辩证思维。肯定和否定是矛盾的两个方面,矛盾的两个方面不是彼此孤立的,它们处在既对立又统一的关系中。因此考察一个命题,或证明一命题都应从两方面进行考虑,正因为“统一物之分为两个部分以及对它的矛盾着的部分的认识,是辩证法的实质。”^① 所以,我们必须在对立中把握统一,在统一中把握对立,反证法正是这种辩证思想的产物。

总之数学是一门充满矛盾,充满辩证思维的学科,它的每一个定理都是真理的表现,数学定理的客观性和不以人的意志为转移的特点表明了真理的绝对性,而定理的条件表明一切数学真理都是相对真理,因此真理永远是绝对真理与相对真理的统一。“无数相对真理之总和,就是绝对的真理。”^② 正如数学中的极限一样,人对于数学的认识永远是相对性,因而也只能越来越靠近绝对真理,而永远达不到绝对真理,于是人们对于数学的认识将永远继续

下去, 数学也将永远处于发展之中。

参 考 文 献

- [1] 恩格斯. 反杜林论. 北京: 人民出版社, 1970; 118—119
- [2] 解思泽, 赵树智. 数学思想方法纵横论. 北京: 科学出版社, 1987; 108、131—136
- [3] 毛泽东. 毛泽东选集(合订本). 北京: 人民出版社, 1969; 282
- [4] 毛泽东. 毛泽东选集(合订本). 北京: 人民出版社, 1969; 297
- [5] 高等数学. 上海: 上海科学技术出版社, 146—147
- [6] 列宁. 列宁全集(第55卷). 北京: 人民出版社, 1990; 306
- [7] 列宁. 列宁全集(第38卷). 北京: 人民出版社, 1990; 407
- [8] 列宁. 唯物主义和经验批判主义. 第四版. 北京: 人民出版社, 122—129

About Dialectics in Advanced Mathematics

Gong Daihua

Zhu Jingping

Abstract

In this paper some philosophic thinking in mathematics is listed and analyses of concrete examples are provided.

key words: mathematical philosophic