无环有根平面地图节点剖分计数方程

陶　长　琪

（江西财经学院）

摘　要

本文对无环有根平面地图进行了研究，得到了它的节点剖分计数方程：

$$D=1+\phi_y^{-1}\left(\frac{xy\delta_{x,y}D}{1-xy\delta_{x,y}D}\right)\left(D=D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots),\delta_{x,y}D=\frac{xD-yD(y)}{x-y},\right.$$

$\left.D(y)=D(y_1,y_2,\cdots\cdots),\phi_y(y_i)=y^i\right)$；通过运用作者建立的设立参数法得到了它的以根节点度数、边数以及节点个数为计数参数的二次计数方程：

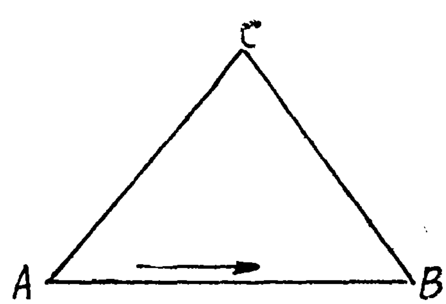
$$X^2YF^2+[-Z(X-1)-XYF(1)+X^2YZ^2-X^2Y]\cdot F+Z^2(X-1)+XYZF(1)-XYZ^2F(1)=0\quad(F=F(X,Y,Z),\ F(1)=F(1,Y,Z))，$$

并求得它的仅以边数为计数参数的计数显式解 $\frac{6(4n+1)!}{(3n+3)!n!}$。

关键词：无环；有根；地图；计数

0　引言

地图，指图在曲面上的2-胞腔嵌入，如果这个曲面是平面或球面则这种地图称为平面地图，本文讨论的地图皆为曲面是平面的平面地图也叫平面图。如果在一个地图上将一条特定的边规定一个方向，则称为有根的，这条边称为根边，它的始端称为根节点，根边右侧的面称为根面。一般总可选定无限面为根面，有根地图上的所有点皆称为节点，除根节点外所有节点称为非根节点。



如图为一个三角形地图，A：根节点；$\overrightarrow{AB}$：根边；B、C：非根节点，ΔABC外部面：根面。

本文于1991年10月21日收到

对于一平面地图其上某一点或一面的度数是指该平面地图上所有与该点或该面所关联的边数。若某一点仅有一环关联，则此点度数计为2。同样对于一面若仅有一割边关联，则此面度数亦计为2。

点地图指仅由一个点构成的地图，表示为•；环地图指仅由一点与一边构成的地图，表示为Q；链地图指仅由二点与一边构成的地图，表示为•—•。所谓有根平面地图指已标出根节点、根边与根面的平面地图。它的计数问题就是对满足一定条件的不同构平面地图的个数问题。对于任二有根平面地图M_1与M_2，ϕ是$M_1 \to M_2$的一个映射，M_1与M_2的根节点、根边及根面分别设为P_i；(p_i,q_i)；$M_{(p_i,q_i)}$ $(i=1,2)$，欲使M_1与M_2同构必须满足以下条件：

（Ⅰ）ϕ：$P_1 \to P_2$　　$\phi(P_1)=P_2$

（Ⅱ）ϕ：$(p_1,q_1) \to (p_2,q_2)$　　$\phi(p_1,q_1)=(p_2,q_2)$

（Ⅲ）ϕ：$M_{(p_1,q_1)} \to M_{(p_2,q_2)}$　　$\phi M_{(p_1,q_1)}=M_{(p_2,q_2)}$

（Ⅳ）$\phi(u_{1j})=u_{2j}$，　$\phi(v_{1j})=v_{2j}$，　$\phi(w_{1j})=w_{2j}$

u_{1j}，u_{2j}为M_1与M_2相对应的非根节点；
v_{1j}，v_{2j}为M_1与M_2相对应的非根边；
w_{1j}，w_{2j}为M_1与M_2相对应的非根面。

设U是所有有根平面地图集合，对于任一$M \in U$记$m(M)$为M的根节点度数，$n_i(M)$为M中度数为i的非根节点个数；依节点剖分的地图计数问题即为对于给定的非负整数$m(M)=m$，$n_i(M)=n_i$，$i \geqslant 1$的组合上不同构地图M的个数，U的计数函数设为$D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)=\sum_{M \in U} x^{m(M)} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}$。

在计数时我们要用到二次型法及Lagrange反演定理。二次型法：对于一个给定的有根平面地图的计数函数$D(x,y)$，它满足如下二次方程：

$$D^2(x,y)+[g_1+D(1,y)g_2]\cdot D(x,y)+g_1^*+D(1,y)g_2^*=0$$

式中$g_1^*,g_2^*,g_1,g_2 \in G(x,y)$为已知函数（$G(x,y)$为x，y的二次函数集合），$D(1,y)$是当x取1时的$D(x,y)$。为了求出$D(1,y)$而后解二次方程求出$D(x,y)$的计数显式，

$$\text{令：}\begin{cases} \left\{[g_1+g_2D(1,y)]^2-4[g_1^*+D(1,y)g_2^*]\right\}\Big|_{x=\alpha}=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{[g_1+g_2D(1,y)]^2-4[g_1^*+D(1,y)g_2^*]\right\}\Big|_{x=\alpha}=0 \end{cases}$$

得到 $y=g(\alpha)$，$D(1,y)=g^*(\alpha)$。

再用Lagrange反演定理得出$D(1,y)$的计数显式，以$y=g(\alpha)$，$D(1,y)=g^*(\alpha)$代入得到

$$\begin{cases} D(x,y) = D(x,g(\alpha)) = D^*(x,\alpha) \\ y = g(\alpha) \end{cases}$$

再用Lagrange反演定理得出D(x,y)的显式解。Lagrange反演定理：设$\mathbb{R}[[x]] = \left\{ \sum_{i\geqslant 0} C_i x^i \middle| C_i \in \mathbb{R}, i\geqslant 0 \right\}$表示x的幂级数集合。

令：$\mathbb{R}[[x]]_0 = \left\{ f\in \mathbb{R}[[x]] \middle| [x^0] f = 0 \right\}$

$\mathbb{R}[[x]]_1 = \left\{ f\in \mathbb{R}[[x]] \middle| \left(f(0)\right)^{-1} \text{存在} \right\}$

令：$\mathbb{R}((x)) = \left\{ \sum_i C_i x^i \middle| C_i \in \mathbb{R}\text{且}\mathrm{Card}\left\{ i \middle| C_i \neq 0,\ i\geqslant 0 \right\} < \infty \right\}$

设$\phi(\lambda) \in \mathbb{R}[[\lambda]]_1$，存在一个幂级数$\omega(t) \in \mathbb{R}[[t]]$

（1）如果$f(\lambda) \in \mathbb{R}((\lambda))$，则有：

$$[t^n] f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{n}[\lambda^{n-1}]\ (f'(\lambda)\phi^n(\lambda)) & n\neq 0,\ n\geqslant V_a lf \\ [\lambda^0] f(\lambda) + [\lambda^{-1}] f'(\lambda)\cdot \mathrm{Log}\ (\phi(\lambda)\phi^{-1}(0)) & n=0 \end{cases}$$

（2）如果$F(\lambda) \in \mathbb{R}[[\lambda]]$，则有：

$$\sum_{n\geqslant 0} C_n t^n = F(\omega)\ (1 - t\phi'(\omega))^{-1}$$

$$C_n = [\lambda^n]\ F(\lambda)\phi^n(\lambda)$$

1　引理及定理的得出

所谓无环有根平面地图指不含任何环的有根平面地图。设V是所有这种地图的集合，规定点地图属于V，用$D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)$表示V的计数函数，对V进行分解$V = V_1 + V_2$，$V_1$为点地图，$V_2$为V的其余地图集合。则$D_1(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)$，$D_2(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)$分别表示$V_1$与$V_2$的计数函数。

引理 1　$D_1(x,y_1,y_2,\cdots\cdots) = 1$

证明：显然

记$V' = \left\{ M\cdot R \middle| M\in V_2, R\text{为}M\text{的根边} \right\}$，M·R表示M收缩根边R为一点所得的地图，M·R的定根规则是：根边为M的根面边界上根边的后继边，其根节点、根面自明。$M_1\supset M_2$表示M_2在M_1的一个与根边关联的有限面内，或若M_1为点地图时，M_2在M_1的无限面内；且$M_1, M_2\in V$，其根节点分别为P_1, P_2，$M_1\cap M_2 = \{P\}$；$P_1 = P_2 = P$，$M_1\supset M_2$的根节点为P，画图分析容易得出：

引理 2　$V' = \sum_{k\geqslant 0} (M_1\supset N_1\supset M_2\supset N_2\supset\cdots\cdots N_k\supset M_{k+1})$

其中$M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{k+1} \in V$

$N_1, N_2, \cdots\cdots, N_k$皆为环地图

对任一$M \in V$，令$J_p = (e_1, e_2, \cdots\cdots, e_{m(M)})$为根节点p处的一个旋，$e_1 = (p, q)$为M的根边，在$\lambda_p$中出现二相继元素间的线性序$(e_1, e_2)$，$(e_2, e_3)$，……分别称为第一角，第二角……且第m(M)角为与无限面关联的角。

引理3 $D_2(x, y_1, y_2, \cdots\cdots) = \phi_y^{-1}\left[\sum_{k \geqslant 0}\left(\sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y^{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}\right)^{k+1}\right]$

其中l为新增面度数减1所得数，ϕ_y为作用在y上的线性算子$\phi_y(y_l) = y^l$，可规定它对$\prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}$项不起作用。

证明：对任一$M' \in V'$，若$k=0$也即M'中不含环地图记V_2中收缩根边后具有这种性质的地图集合记为V_2^*，其计数函数相应记为$D_2^*(x, y_1, y_2, \cdots\cdots)$，则有：

$$D_2 = D_2^*(x, y_1, y_2, \cdots\cdots)$$

$$= \sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y_{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}$$

若$k>0$时记V_2中相对应的地图集合为V_2^{**}，其计数函数相应记为$D_2^{**}(x, y_1, y_2, \cdots\cdots)$，设$N_i$在$M_i$的第$j_i$角内，则$0 \leqslant j_i \leqslant m(M_i)$，$1 \leqslant i \leqslant k$，则有：

$$D_2^{**}(x, y_1, y_2, \cdots\cdots)$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \sum_{\substack{M_i \in V \\ 0 \leqslant j_i \leqslant m(M_i) \\ 1 \leqslant i \leqslant k}} x^{\sum_{i-1}^{k}[m(M_i) - j_i + 1]} \cdot y^{\sum_{i-1}(j_i+1)} \cdot \prod_{l-1}^{k} \cdot \prod_{i \geqslant 1}^{k} \cdot y_i^{n_i(M_l)}$$

$$\phi_y D_2^* = \sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y^{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}$$

$$\phi_y D_2^{**} = \sum_{k \geqslant 1}\left[\sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y^{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}\right]^{k+1}$$

故$D_2 = D_2(x, y_1, y_2, \cdots\cdots) = D_2^* + D_2^{**} = \phi_y^{-1}[\phi_y D_2^* + \phi_y D_2^{**}]$

$$= \phi_y^{-1}\left\{\sum_{k \geqslant 0}\left[\sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y^{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)}\right]^{k+1}\right\}$$

引理得证。

引理4 $\sum_{\substack{M \in V \\ 0 \leqslant l \leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1} \cdot y^{l+1} \cdot \prod_{i \geqslant 1} y_i^{n_i(M)} = xy\delta_{x,y}D$

其中$D = D(x, y_1, y_2, \cdots\cdots)$

$$6_{x,y}D=\frac{xD-yD(y)}{x-y}$$

$$D(y)=D(y,y_1,y_2\cdots\cdots)$$

证明：$\sum\limits_{\substack{M\in V\\0\leqslant l\leqslant m(M)}} x^{m(M)-l+1}\cdot y^{l+1}\cdot\prod\limits_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}$

$$=\sum_{\substack{M\in V\\0\leqslant l\leqslant m(M)}} x^{m(M)+1}\cdot y\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^l\cdot\prod_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}$$

$$=\sum_{M\in V} x^{m(M)+1}\cdot y\cdot\frac{y^{m(M)+1}-x^{m(M)+1}}{x^{m(M)}(y-x)}\cdot\prod_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}$$

$$=\frac{xy}{x-y}\left[x\sum_{M\in V} x^{m(M)}\cdot\prod_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}-y\sum_{M\in V} y^{m(M)}\cdot\prod_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}\right]$$

$$=\frac{xy}{x-y}\left[xD-yD(y)\right]=xy6_{x,y}D$$

定理1　无环有根平面地图节点剖分的计数方程为：$D=1+\phi_y^{-1}\left(\frac{xy6_{x,y}D}{1-xy6_{x,y}D}\right)$，其中

$D=D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)$。

证明：由引理1，3，4得

$$D=D_1+D_2=1+\phi_y^{-1}\left[\sum_{k\geqslant0}(xy6_{x,y}D)^{k+1}\right]$$

$$=1+\phi_y^{-1}\left(\frac{xy6_{x,y}D}{1-xy6_{x,y}D}\right)$$，定理得证。

2　应用

作者建立了一种设立参数法对以上定理1的结果进行了有益的应用。设立参数法：对于函数$D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)$中的$y_i$令$y_i=zy^i$，则

$$D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)=\sum_{M\in V} x^{m(M)}\cdot\prod_{i\geqslant1} y_i^{n_i(M)}$$

$$=\sum_{M\in V} x^{m(M)}\cdot y^{\sum_{i\geqslant1} i\cdot n_i(M)}\cdot z^{\sum_{i\geqslant1} n_i(M)}$$

$$=f(x,y,z)$$

令$p(M)=m(M)$，$q(M)=\dfrac{m(M)+\sum_{i\geqslant1} i\cdot n_i(M)}{2}$，$r(M)=\sum_{i\geqslant1} n_i(M)+1$，则：

$$f(x,y,z)=\sum_{M\in V} x^{p(M)}\cdot y^{2q(M)-p(M)}\cdot z^{r(M)-1}$$

其中p(M)：表示M的根节点度数

q(M)：表示M的边数

r(M)：表示M的节点个数

$$\text{对} f(x,y,z)=\sum_{M\in V} x^{P(M)}\cdot y^{2q(M)-P(M)}\cdot z^{r(M)-1}$$

$$=\sum_{M\in V}\left(\frac{x}{y}\right)^{P(M)}\cdot\left(y^2\right)^{q(M)}\cdot z^{r(M)}\cdot z^{-1}$$

再令$\frac{x}{y}=X$，$y^2=Y$，$z=Z$

$$\text{则}\begin{cases} x=X\sqrt{Y}\\ y=\sqrt{Y}\\ z=Z\end{cases}\quad ;\ f(x,y,z)=F^*(X,Y,Z)=\sum_{M\in V} X^{P(M)}\cdot Y^{q(M)}\cdot Z^{r(M)}/Z$$

$$\text{设 } F(X,Y,Z)=F^*(X,Y,Z)\cdot Z=\sum_{M\in V} X^{P(M)}\cdot Y^{q(M)}\cdot Z^{r(M)}$$

则F(X,Y·Z)表示V的以根节点度数、边数及节点个数为计数参数的计数函数。以上即为作者建立的设立参数法。

运用以上方法则$D=D(x,y_1,y_2,\cdots\cdots)=F(X,Y,Z)/Z$

$$D(y)=D(y,y_1,y_2,\cdots\cdots)$$

$$=\sum_{M\in V} y^{m(M)}\cdot\prod_{i\geqslant 1} y_i^{n_i(M)}$$

$$=\sum_{M\in V}\sqrt{Y}^{m(M)}\cdot\sqrt{Y}^{\sum\limits_{i\geqslant 1} i n_i(M)}\cdot Z^{\sum\limits_{i\geqslant 1} n_i(M)}$$

$$=\sum_{M\in V} Y^{\frac{m(M)+\sum\limits_{i\geqslant 1} i\cdot n_i(M)}{2}}\cdot Z^{\sum\limits_{i\geqslant 1} n_i(M)}$$

$$=\sum_{M\in V} Y^{q(M)}\cdot Z^{r(M)-1}=F(1,Y,Z)/Z=F(1)/Z$$

$$\delta_{x,y}D=\frac{xD-yD(y)}{x-y}=\frac{XF-F(1)}{Z(X-1)}$$

定理2 无环有根平面地图以根节点度数、边数及节点个数为计数参数的计数方程为：

$$X^2YF^2+[-Z(X-1)-XYF(1)+X^2YZ^2-X^2Y]\cdot F+Z^2(X-1)+XYZF(1)-XYZ^2F(1)=0$$

证明：由$D=D_1+D_2$，$D_1=F_1=1$

$$D_2=F_2=\frac{X\sqrt{Y}\cdot\sqrt{Y}\cdot\dfrac{XF-F(1)}{Z(X-1)}}{1-X\sqrt{Y}\cdot\sqrt{Y}\cdot\dfrac{XF-F(1)}{Z(X-1)}}$$

$D=F/Z$化简后得定理2方程。

对于定理2中方程令$Z=1$，则得无环有根平面地图依根节点度数与边数的计数方程：

$$X^2YF^2-(XYF(1)+X-1)F+X-1=0$$

此处$F(1)=F(1,Y,1)$表示仅以边数为计数参数的计数函数。根据二次型法有

$$\begin{cases}\left[(XYF(1)+X-1)^2-4X^2Y(X-1)\right]\Big|_{X=\xi}=0\\ \dfrac{\partial}{\partial X}\left[(XYF(1)+X-1)^2-4X^2Y(X-1)\right]\Big|_{X=\xi}=0\end{cases}$$

化简得参数方程：

$$\begin{cases}\xi-1=Y\xi^4\\ F(1)=1+(\xi-1)\left[1-(\xi-1)-(\xi-1)^2\right]\end{cases}$$

再令$\eta=\xi-1$得：

$$\begin{cases}\eta=Y(\eta+1)^4\\ F(1)=1+\eta(1-\eta-\eta^2)\end{cases}$$

利用Lagrange反演定理得：

$$F(1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(4n+1)!}{(3n+3)!\,n!}Y^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6(4n+1)!}{(3n+3)!\,n!}Y^n$$

此显式解意义为边数是n的无环有根平面地图不同构个数是$\frac{6(4n+1)!}{(3n+3)!\,n!}$，从而对定理1进行了有益的应用。对F的求解繁杂，这里不作研究。

参 考 文 献

〔1〕W·T·Tutte. A Census of planar maps. Canad·J·Math, 1963; 15: 247—271

〔2〕刘彦佩。不可分离平面地图节点剖分计数方程。科学通报，1985; 9: 646—649

〔3〕徐利治。计算组合数学。上海：上海科技出版社，1983

Enumerial Equation of Rooted No—Loop Plane Maps with Vertex Partition

Tao Changqi

Abstract

In this paper, the author made the research to rooted no—loop plane maps and obtained its enumerial equation with vertex partition $D=1+\phi_y^{-1}\left(\frac{xy6_{x,y}D}{1-xy6_{x,y}D}\right)$, by applying the method of "Making—parmeters Method" established by the author, the author obtained its enumeral equation with rooted vertice degrees, edges and rertices

$$X^2YF+[-Z(X-1)-XYF(1)+X^2YZ^2-X^2Y]\cdot F$$
$$+Z^2(X-1)+XYZF(1)-XYZ^2F(1)=0,$$

the author also obtained its enumeral solution with edges $\frac{6(4n+1)!}{(3n+3)!n!}$

Key words: no—loop; rooted; map; enumeration