

自补图的荫度

周尚超

(基础课部)

摘 要

文 [1] 中猜想: 对 P 阶简单图 G , 有

$$a(G) + a(\bar{G}) \leq 1 + \left\{ \frac{P}{2} \right\}$$

其中 $\bar{G}$ 是 G 的补图, $a(G)$ 为 G 的荫度, $\{x\}$ 为不小于 x 的最小整数. 本文证明对于自补图此猜想是成立的.

关键词: 图; 自补图; 荫度; 猜想

本文中的图是无向简单图. $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是图 G 的顶点集和边集. 对图 G , $V(G)$ 的划分 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, 使 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的导出图 $G(V_i)$ 不含圈的最小 n , 称为 G 的荫度, 记为 $a(G)$. 文 [1] 中提出如下猜想: 对 P 阶图 G , 有

$$a(G) + a(\bar{G}) \leq 1 + \left\{ \frac{P}{2} \right\} \quad (1)$$

其中 $\bar{G}$ 是 G 的补图, $\{x\}$ 是不小于 x 的最小整数.

本文证明了对于自补图此猜想成立且对于奇数阶自补图 (1) 式右端可达, 对于偶数阶自补图有

$$a(G) + a(\bar{G}) \leq \frac{P}{2} \quad (2)$$

且 (2) 式右端可达.

设 f 是 $V(G)$ 上的一个置换, 若 $uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(\bar{G})$, 则称 G 是自补图, f 称为 G 的自补置换. 设 $f = f_1 f_2 \dots f_r$ 是 f 的不交的轮换分解. $|f_i|$ 表示轮换 f_i 的长度.

引理 1^① 若 $f = f_1 f_2 \dots f_r$ 是 G 的自补置换, 则 $|f_i|$ 中至多有一个为 1, 其余都是 4 的倍数.

引理 2^② 自补图 G 的奇数个自补置换之积是 G 的自补置换, 偶数个自补置换之积是 G 的自同构.

引理 3 设 $f = (u_1 u_2 \dots u_m)$ 是 G 的自补置换, u 的下标按模 $4n$ 运算. 令 $V_1 = \{u_{2i+1}, u_{2i+2}, u_{2i+3}, u_{2i+4}\}$, $V_2 = f^1(V_1)$, $V_{i+1} = f^i(V_1)$, 则 $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$ 是 $V(G)$ 的一个划分, 且

本文于 1992 年 3 月 23 日收到

* 江西省自然科学基金资助项目

对任意 $k, l, G(V_k)$ 与 $G(V_l)$ 同构。

证 分划是显然的。 $f^k \in \text{Aut } G$ 的自同构群, 根据引理 2), f^k 是 $G(V_k)$ 到 $G(V_{k+1})$ 的同构映射。证毕。

设 $D_1 = \{u_1, u_n\}, D_2 = \{u_2, u_{n-2}\}, \dots, D_n = \{u_{2n}, u_{2n+2}\}, A = \{v_1, v_2, \dots, v_n | v_i \in D_i\}$ 。

称 A 是 $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ 的代表元素集。

设 $U_1 = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\}, U_2 = \{u_2, u_4, \dots, u_n\}$ 。

称 $|i-j|$ 与 $4n-|i-j|$ 中的较小者为边 $u_i u_j$ 的长度。

引理 4^① $f = (u_1 u_2 \dots u_n)$ 是 G 的自补置换的充要条件是:

(1) 存在一个代表元素集 A , 使得与 u_1 邻接的偶数顶点集是 A , 与 u_{1+2k} 邻接的偶数顶点集是 $A + 2k = \{u_{i+2k} | u_i \in A\}$;

(2) $G(U_i)$ 中含有一条长为 $2i$ 的边 $\Leftrightarrow G(U_j)$ 含有所有长为 $2i$ 的边 $\Leftrightarrow G(U_k)$ 不含长为 $2i$ 的边。这里 $\{j, k\} = \{1, 2\}$ 。

引理 4(1) 可述为 $u_1 u_{2i} \in E(G) \Leftrightarrow u_1 u_{4n+2-2i} \in E(\bar{G})$ 。

定理 1 设 $f = (u_1 u_2 \dots u_n)$ 是 G 的自补置换, 则存在 $V(G)$ 的一个分划 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$, 使得 $G(V_i) = P_j \cup K_t$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。这里 P_j 是 j 个点的一条道路, K_t 是 t 个点的完全图, $j+t = 4, j \in \{2, 3, 4\}$ 。

证 u_1 与 $\{u_2, u_4\}$ 的邻接情形只有 4 种。

(1) $u_1 u_2 \in E(G), u_1 u_4 \in E(\bar{G})$ 。

令 $V_1 = \{u_1, u_3, u_2, u_4\}, f^2 = (u_1 u_3 \dots u_{n-1})(u_2 u_4 \dots u_n) \in \text{Aut } G \Rightarrow f^2(u_1 u_2) = u_3 u_4 \in E(G)$ 。

由引理 4(1), $u_1 u_2 \in E(G) \Rightarrow u_1 u_n \in E(\bar{G}) \Rightarrow f^2(u_1 u_n) = u_3 u_2 \in E(\bar{G})$ 。

由引理 4(2), $u_1 u_3$ 和 $u_2 u_4$ 只有一条在 $E(G)$ 中。

因此 $G(V_1) = u_1 u_2 u_4 u_3 = P_4$ 或 $G(V_1) = u_2 u_1 u_3 u_4 = P_4$ 。

(2) $u_1 u_2 \in E(\bar{G}), u_1 u_4 \in E(G)$ 。

$u_1 u_2 \in E(\bar{G}), u_1 u_4 \in E(G)$ 。

$u_1 u_2 \in E(\bar{G}) \Rightarrow u_1 u_n \in E(G)$ (引理 4(1))

且 $f^2(u_1 u_2) = u_3 u_4 \in E(\bar{G}) \Rightarrow f^2(u_1 u_n) = u_3 u_2 \in E(G), u_1 u_3$ 和 $u_2 u_4$ 只有一条在 $E(G)$ 中。

因此 $G(V_1) = u_1 u_4 u_2 u_3$ 或 $= u_4 u_1 u_3 u_2$ 。

(3) $u_1 u_2 \in E(\bar{G}), u_1 u_4 \in E(\bar{G})$ 。

$u_1 u_2 \in E(\bar{G}) \Rightarrow u_1 u_n \in E(G)$ (引理 4(1)) $\Rightarrow f^2(u_1 u_n) = u_3 u_2 \in E(G)$ 。

$u_1 u_2 \in E(\bar{G}) \Rightarrow f^2(u_1 u_2) = u_3 u_4 \in E(\bar{G})$ 。

$G(V_1) = u_1 u_3 u_2 \cup \{u_4\}$ 或 $u_3 u_2 u_4 \cup \{u_1\}$, 即 $G(V_1) = P_3 \cup K_1$ 。

(4) $u_1 u_2 \in E(G), u_1 u_4 \in E(G)$ 。

由引理 4(1), $u_1 u_n \in E(\bar{G}), u_1 u_{n-2} \in E(\bar{G})$ 。

令 $V_1 = \{u_1, u_3, u_{n-2}, u_n\}, u_1 u_3$ 和 $u_{n-2} u_n$ 只有一条在 $E(G)$ 中。

$u_1 u_{n-2} \in E(\bar{G}) \Rightarrow f^2(u_1 u_{n-2}) = u_3 u_n \in E(\bar{G})$ 。

若 $u_3 u_{n-2} \in E(G)$, 则 $G(V_1) = P_3 \cup K_1$ 。

若 $u_i u_{4m} \in E(\bar{G})$, 则 $G(V_1) = P_2 \cup \bar{K}_2$.

令 $V_2 = f^1(V_1)$, $V_{i+1} = f^i(V_i)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. 由引理 3, 知 $G_i = P_2 \cup \bar{K}_i$. 证毕

引理 5 设 $f = f_1 f_2 \dots f_p$ 是 G 的自补置换, $U_i = \{f_i\}$ 是 f_i 变动的顶点集 (若 $f_i = (u_0)$, 令 $U_i = \{u_0\}$), 则 $G(U_i)$ 是以 f_i 为自补置换的自补图, $i = 1, 2, \dots, p$. 这里将 K_1 也看作自补图.

证 $uv \in E(G(U_i)) \Rightarrow f(uv) = f_i(uv) \in E(\bar{G}) \Rightarrow f_i(uv) \in E(\bar{G}(U_i))$.

定理 2 设 G 是 $4m$ 阶自补图, 则存在 $V(G)$ 的划分 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $|V_i| = 4$, $i = 1, 2, \dots, m$, 使得 $G(V_i)$ 不含圈, 即 $a(G) \leq m$.

证 设 $f = f_1 f_2 \dots f_p$ 是 G 的自补置换, $U_i = \{f_i\}$, 则 $G(U_i)$ 是以 f_i 为自补置换的自补图 (引理 5).

由定理 1, $G(U_i)$ 可分解为若干个 4 点子图, 每个子图都不含圈, $i = 1, 2, \dots, p$. 证毕

定理 3 设 G 是 $4m+1$ 阶自补图, 则存在 $V(G)$ 的划分 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $|V_0| = 1$, $|V_i| = 4$, $i = 1, 2, \dots, m$, 使得 $G(V_i)$ 不含圈, 即 $a(G) \leq m+1$.

证 设 $f = (u_0) f_1 f_2 \dots f_p$ 是 G 的自补置换, 则 $G - u_0$ 是 $4m$ 阶自补图, 以 $f_1 f_2 \dots f_p$ 为自补置换. 由定理 2 即得. 证毕

定理 4 存在 $a(G) = m$ 的 $4m$ 阶自补图 G 及 $a(G') = m+1$ 的 $4m+1$ 阶自补图 G' .

证 设 $V(G) = U_1 \cup U_2$, $U_1 = \{u_1, u_3, \dots, u_{4m-1}\}$, $U_2 = \{u_2, u_4, \dots, u_{4m}\}$.

令 $G(U_2) = K_{2m}$, $G(U_1) = \bar{K}_{2m}$.

令 $A = \{u_2, u_4, \dots, u_{2m}\}$ 是与 u_1 邻接的偶数点集. $A + 2i = \{u_{j+2i} | u_j \in A\}$ 是与 u_{1+2i} 邻接的偶数点集.

由引理 4, $f = (u_1 u_2 \dots u_{4m})$ 是 G 的自补置换, G 是自补图. G 有一个 $2m$ 阶子完全图, $a(G) \geq m$, 由定理 2 得 $a(G) = m$. 将 G 增加一个点 u_0 , 增加的边是 $u_0 u_{2i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2m$), 这个图用 G' 表示, 则 $(u_0)(u_1 u_2 \dots u_{4m})$ 是 G' 的自补置换, G' 是自补图. G' 有一个 $2m+1$ 阶子完全图 $a(G') \geq m+1$, 由定理 3 得 $a(G') = m+1$. 证明

由定理 2—4, 对自补图文 [1] 中的猜想成立且 (1)、(2) 式的右端可达.

参 考 文 献

- [1] 张忠辅, 王建方. 图和补图的荫度. 曲阜师范大学学报, 1990; (2): 11—13
- [2] 周尚超. 完全超紧图. 应用数学, 1991; (1): 8—13
- [3] 周尚超. 自补图的自同构群. 华东交通大学学报, 1986; (2): 17—27

The Shades of Self Complementary Graphs

Zhou Shangchao

Abstract

A conjecture was made as follows: [1]

On p -order simple graph G , they have

$$a(G) + a(\bar{G}) \leq 1 + \left\{ \frac{p}{2} \right\}$$

Where $\bar{G}$ explains the complement of G , $a(G)$ explains the shades of G , and $\{x\}$ explains a minium integral not less x .

In this note, we proved that if G is a self complementary graph, then the conjecture is true.

Key words: graph; self-complementary graph; shades; conjecture