

# 关于混凝土流变模型的一点笔记

张安哥

邹承康

(校长办公室)

(设计事务所)

## 摘 要

本文对文献〔1〕中提出的混凝土流变模型进行了探讨,指出该模型中有一个弹性元件是多余的。去掉该元件后得到的流变方程是等效的。

关键词:混凝土;流变;模型

由胶结材料、粗细骨料和水(或其他液体)按一定比例混合硬化而成的混凝土是非均质组合固体。近年来,一方面,从材料的微观机理出发,用连续损伤的观点来考察混凝土在多轴应力状态或疲劳荷载作用下所呈现出来的复杂的力学行为,形成了混凝土损伤力学研究这一十分活跃的领域<sup>①</sup>;另一方面,鉴于混凝土在持续荷载作用下呈现出明显的流动现象,用唯象学方法将混凝土作为流变材料的研究也取得了很大的进展,并积累了大量有实用价值的试验研究资料,建立了不少相应的混凝土流变模型<sup>②③</sup>。比较经典的有 Maxwell 模型、Voigt-Kelvin 模型、Bingham 模型、Burgers 模型、Hansen 模型等(图1)。

在文献〔1〕中提出,要比较全面地反映出混凝土材料的流动特性,流变模型应满足下列四个条件:

1. 开始加载时应有瞬时应变  $\epsilon_0$  存在。
2. 当应力  $\sigma$  小于塑变值  $f$  时,不发生徐变。
3. 当应力  $\sigma$  大于  $f$  且保持不变时,应变随时间增加而增大,但应变速率随时间增加而减小。
4. 当应变不变时,应力随时间增加而减小。

以上所列举的流变模型均无法全部满足这四个条件。因此,在 Burgers 模型的基础上进行改进后,文献〔1〕提出了如下形式的流变模型:

$$H - (St. v | Bu) \quad (1)$$

上式中 H、St. v、Bu 分别表示胡克体、圣维南体及 Burgers 模型,“-”号表示串联,“|”号表示并联,模型见图2。

由该模型导出了如下流变方程:

本文于1992年6月23日收到

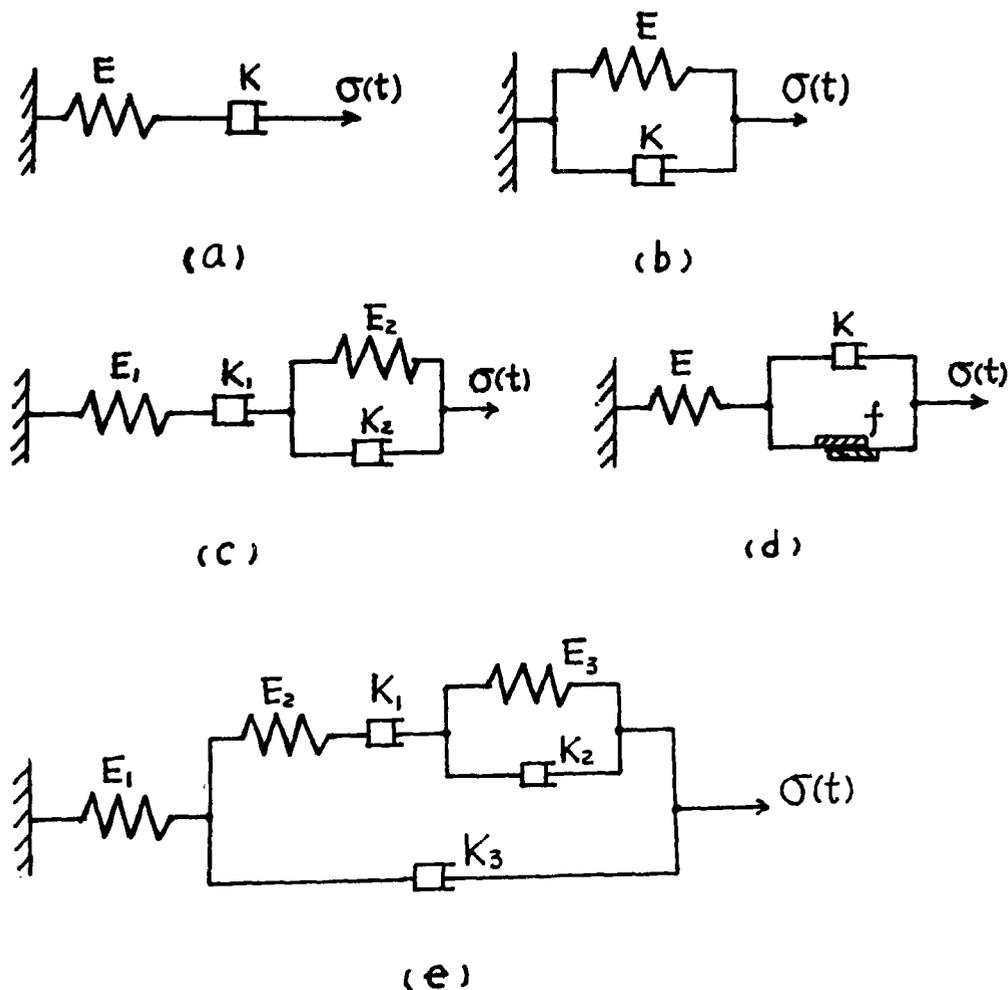


图1 a) Maxwell 模型      b) Voigt-Kelvin 模型  
 c) Burgers 模型      d) Bingham 模型  
 e) Hansen 模型

$$\sigma - f + \left(\frac{K_1}{E_2} + \frac{K_1 + K_2}{E_1}\right) \frac{d\sigma}{dt} + \left(\frac{K_1 K_2}{E_2 E_3} + \frac{K_1 K_2}{E_1 E_2}\right) \frac{d^2\sigma}{dt^2}$$

$$= K_1 \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{K_1 K_2}{E_2} \frac{d^2\epsilon}{dt^2} \tag{2}$$

式中： $E_i$  是弹性模量， $K_i$  是粘性系数， $f$  是圣维南常量即塑变值。

该模型能满足前述的四个条件，是一个很大的优点，但仔细考虑一下该模型，便不难发现，其中有一个胡克体是多余的。从图2中可以看出，当应力  $\sigma$  小于塑变值  $f$  时，与  $f$  并联的

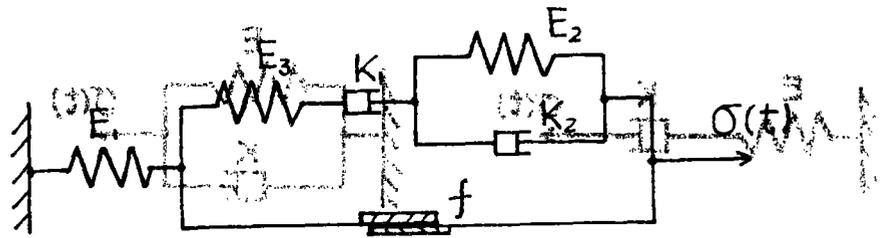


图 2

Burgers 模型部份应力为零, 胡克体  $E_3$  不产生作用。反之, 当应力  $\sigma$  大于  $f$  时, 圣维南体失效, 与之串联或并联部份的应力恒等于  $\sigma - f$ , 此时两个胡克体  $E_1$  与  $E_3$  的设置明显是重复的。因此该模型与如下模型应该是等效的 (见图 3):

$$[H_1 \text{ 与 } (S_1, v_1)(N, V)] \quad (3)$$

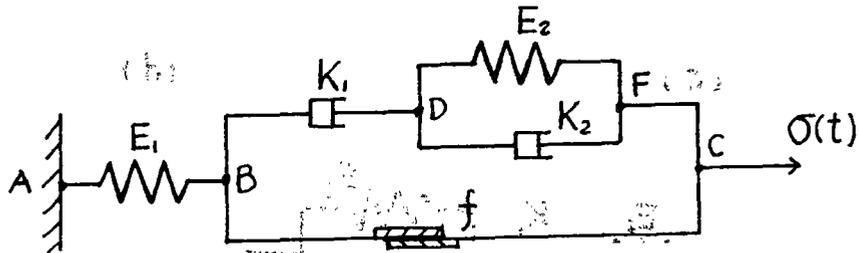


图 3

式中:  $N$ 、 $V$  分别表示牛顿体和 Voigt-Kelvin 模型。下面进一步给出推导。由图 3, 有

$$\begin{cases} \sigma = E_1 \epsilon_{AB} \\ \sigma = \sigma_{BC} + f \\ \epsilon = \epsilon_{AB} + \epsilon_{BC} \end{cases} \quad \text{当 } \sigma > f \text{ 时} \quad (4)$$

式中脚标表示模型中相应部份的应力或应变, 如  $\epsilon_{AB}$  表示 AB 部份的应变。

对模型中 BDFC 部份, 有

$$\begin{cases} \epsilon_{BC} = \epsilon_{BD} + \epsilon_{DC} \\ \sigma_{BC} = E_2 \epsilon_{DC} + K_2 \frac{d\epsilon_{DC}}{dt} \\ \sigma_{BC} = K_1 \frac{d\epsilon_{BD}}{dt} \end{cases} \quad (5)$$

从 (5) 式中消去  $\epsilon_{BD}$ 、 $\epsilon_{DC}$  可得到:

$$\sigma_{BC} + \frac{K_1 + K_2}{E_2} \frac{d\sigma_{BC}}{dt} = K_1 \frac{d\epsilon_{BC}}{dt} + \frac{K_1 K_2}{E_2} \frac{d^2 \epsilon_{BC}}{dt^2} \quad (6)$$

再由 (4) 式, 消去  $\sigma_{BC}$ 、 $\epsilon_{BC}$ , 即可得到相应的流变方程如下:

$$\sigma + \left( \frac{K_1 + K_2}{E_2} + \frac{K_1}{E_1} \right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{K_1 K_2}{E_1 E_2} \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = \dots$$

$$= K_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{K_1 K_2}{E_2} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \quad (7)$$

比较(2)式与(7)式,可见两种流变方程具有完全相同的形式,仅应力 $\sigma$ 的一、二阶导数的系数略有不同。这说明去掉胡克体 $E_2$ 之后仍可得到完全等效的流变方程,而(7)式则要更加简明方便一些。事实上,在图2模型中去掉胡克体 $E_2$ ,从力学角度来说,则意味着令 $E_2$ 趋于无穷大。这样便可以直接由(2)式导出流变方程(7)。

### 参 考 文 献

- [1] 王启宏等. 材料流变学探索. 武汉: 武汉工业大学出版社, 1987: 52—62
- [2] 张安哥等. 混凝土损伤模型概述. 华东交通大学学报, 1989; 1: 13—18
- [3] 欧阳学. 粘弹塑性理论. 长沙: 湖南科学出版社, 1986
- [4] 高荣炎等. 混凝土的徐变. 北京: 中国铁道出版社, 1988
- [5] 傅作新. 工程徐变力学. 北京: 水利电力出版社, 1985

## A Note on Concrete Rheological Model

Zhang Ange Zhou Chengkang

### Abstract

A rheological model of concrete presented by Ref. [1] is discussed in this paper. An elastic element in the model is considered to be superfluous. The same constitutive relation can be obtained from the model without the elastic element.

**Key words:** Concrete, rheology, model