

# 大口井出水量的数值计算方法

王全金

(建筑工程系)

## 摘要

本文详细介绍和讨论了用有限单元法计算大口井出水量的原理和方法。该方法与传统的解析法和图解法相比,具有一般性和精度高,易于处理复杂边界条件和不同介质渗流问题的优点。

作为实际应用的例子,本文对湖北省蒲圻市某厂在层状含水层中河床大口井出水量进行了计算,与实测值对比非常吻合。

关键词:大口井;出水量;数值计算

## 0 引言

大口井是广泛应用的开采浅层地下水的取水构筑物,大口井为机械或人工在含水层中开挖的,外形通常为圆筒形,井壁垂直于地面,井径一般为3~10米,井径在30米以内。大口井有

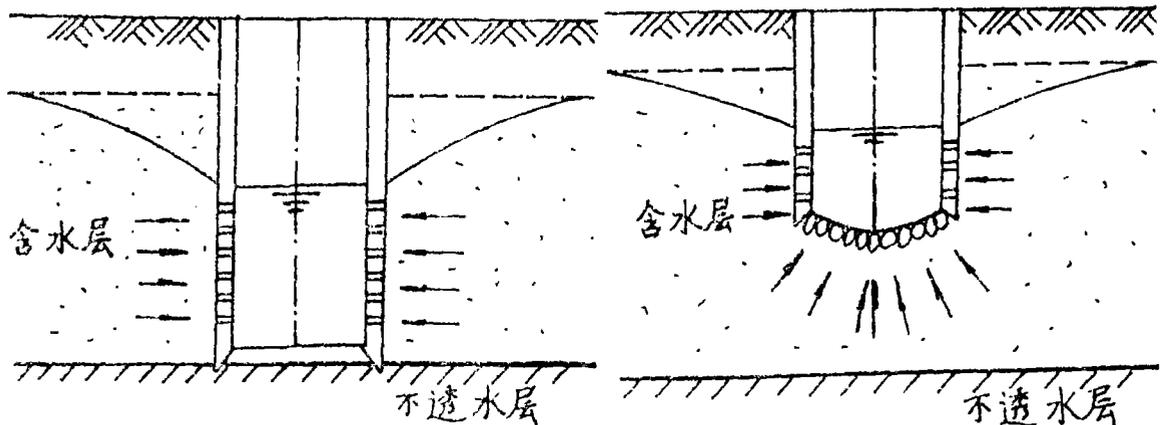


图1 完整式

图2 非完整式

完整式和非完整式之分,完整式大口井贯穿全部含水层,只能从井壁进水,如图1。非完整式大口井未穿透全部含水层,井壁、井底均可进水,如图2。非完整式大口井集水范围大,水力条件

本文于1992年8月3日收到

好,适用于开采较厚的含水层,在实际工程中采用较多。

关于各种类型的大口井的出水量预测是当前给水工程中研究的课题之一。从多孔介质流体动力学可知,这是一个结合边界条件求解拉普拉斯方程的问题。二元拉普拉斯方程的解法,通常有解析法<sup>[1]</sup>和图解法<sup>[2]</sup>。其中解析法是指各种理论公式和经验或半经验公式分析求解,图解的方法是指用绘制渗流流网的方法来求解。以上方法,对于地下水处于稳定流、层流、均匀缓变流动状态、含水层为均质、各向同性,无限分布的边界条件,均能获得较为满意的结果。然而,自然界不可能存在上述理想状态的水井,水文地质参数也常常是变化的,对于这类非稳定流,各向异性,边界条件复杂的一般情况,上述方法则有一定的局限性。本文采用有限单元法求解渗流方程,可以处理各种复杂边界非理想状态的水井渗流问题,具有一般性。

## 1 稳定渗流的基本方程

在大口井的水力计算中,由于含水层面积大,渗井面积相对较小,因此,大口井可看作轴对称问题。

对于轴对称稳定渗流,采用圆柱坐标 $(r, z)$ ,如图3所示,则基本方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}(K_r r \frac{\partial \varphi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z r \frac{\partial \varphi}{\partial z}) + Q = 0 \quad (1)$$

其中: $\varphi$ 为水头函数;

$K_r, K_z$ 为渗透系数;

$Q$ 为内源流量。

相应的边界条件为:

①在边界B上水头已知

$$\varphi = \varphi_B \quad (2)$$

②在边界C上渗流量 $q$ 已知

$$K_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} l_r + K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z = -q \quad (3)$$

其中: $l_r, l_z$ 是边界表面的外法线与 $r$ 和 $z$ 轴的方向余弦。

由基本方程(1)及边界条件(2),(3)

可确定渗流场的水头函数 $\varphi$ 。根据变分原理,这个问题等价于下述泛函的极值问题:

若函数 $\varphi(r, z)$ 在边界B上满足 $\varphi = \varphi_B$ ,并使下列泛函实现极值

$$I(\varphi) = 2\pi \iint_R \left\{ \frac{1}{2} (K_r r \frac{\partial \varphi}{\partial r})^2 + K_z r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - Q\varphi \right\} dr dz + 2\pi \int_C q r \varphi d \quad (4)$$

由欧拉方程可知, $\varphi$ 必然在区域R内满足连续性方程(1),并在边界C上满足(3)式,故 $\varphi$ 为原问题所求的水头函数。注意,在求解过程中,对给定水头的边界B,应令 $\varphi = \varphi_B$ 。

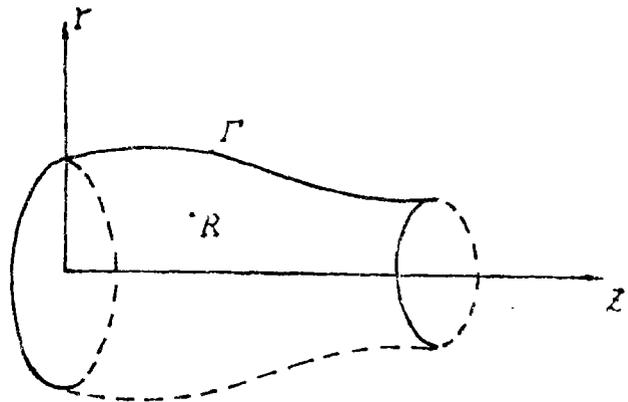


图3

## 2 有限元格式

将求解区域  $R$  划分为有限个单元, 设单元的结点为  $i, j, m, \dots$ , 结点水头为  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_m, \dots$ , 单元形函数为  $N_i, N_j, N_m, \dots$ , 则单元内任一点的水头  $\varphi$  可用形函数表示如下

$$\varphi = [N]\{\varphi\}^e = \sum_i^M N_i \varphi_i \quad (5)$$

其中:  $M$  为单元结点总数。

同时引入坐标插值

$$\begin{cases} r = \sum_i^M N_i r_i \\ z = \sum_i^M N_i z_i \end{cases} \quad (6)$$

现考虑一典型单元  $e$ , 单元区域为  $\Delta R$ , 由(4)式可得:

$$I^e(\varphi) = 2\pi \iint_{\Delta R} \left\{ \frac{1}{2} [K_{,r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + K_{,z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2] - Q\varphi \right\} drdz + 2\pi \int_{r_{\Delta e}} qr\varphi dr \quad (7)$$

对结点水头函数  $\varphi_i$  变分, 则有

$$\frac{\partial I^e(\varphi)}{\partial \varphi_i} = 2\pi \iint_{\Delta R} \left[ K_{,r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + K_{,z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - Q \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} \right] drdz + 2\pi \int_{r_{\Delta e}} qr \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} dr \quad (8)$$

由(5)式知  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial r} \varphi_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} = N_i, \dots$ ,

将上式代入(8)式中, 则得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e(\varphi)}{\partial \varphi_i} &= 2\pi \iint_{\Delta R} \left\{ K_{,r} \frac{\partial N_i}{\partial r} \left( \sum \frac{\partial N_j}{\partial r} \varphi_j \right) + K_{,z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \left( \sum \frac{\partial N_j}{\partial z} \varphi_j \right) \right\} drdz \\ &- 2\pi \iint_{\Delta R} Q N_i drdz + 2\pi \int_{r_{\Delta e}} qr N_i dr \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$h_{ij}^e = 2\pi \iint_{\Delta R} \left\{ K_{,r} \frac{\partial N_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial r} + K_{,z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} drdz$$

$$f_i^e = -2\pi \iint_{\Delta R} Q N_i drdz + 2\pi \int_{r_{\Delta e}} qr \cdot N_i \cdot dr$$

则由

$$\begin{cases} \frac{\partial I'}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial I'}{\partial \varphi_j} \\ \frac{\partial I'}{\partial \varphi_m} \\ \vdots \end{cases} = \frac{\partial I'}{\partial \langle \varphi \rangle'} = 0 \quad (10)$$

可得到

$$[H]'\langle \varphi \rangle' + \{F\}' = 0 \quad (11)$$

将各个单元加以集合,对于求解区域的全部结点,可得到下述有限元方程。

$$[H]\langle \varphi \rangle + \{F\} = 0 \quad (12)$$

$$\text{式中: } H_{ij} = \sum_e h_{ij}^e, \quad F_i = \sum_e f_i^e$$

由(12)式可解出各结点的水头  $\varphi$ , 单元内的流速可从下式计算:

$$\{v\} = \begin{cases} v_r \\ v_z \end{cases} = \begin{cases} -K_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ -K_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} = [S]'\langle \varphi \rangle' \quad (13)$$

式中:

$$[S]'\begin{cases} K_r \frac{\partial N_1}{\partial r} & K_r \frac{\partial N_2}{\partial r}, \dots \\ K_z \frac{\partial N_1}{\partial z} & K_z \frac{\partial N_2}{\partial z}, \dots \end{cases}$$

在渗透边界上,单位面积上的流量为:

$$q_n = -K_r l_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - K_z l_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = [L]'\{S\}'\langle \varphi \rangle' \quad (14)$$

式中:  $[L]'\begin{cases} l_r \\ l_z \end{cases}$

总渗流量为:

$$Q = \sum_i \int_{r_i} 2\pi q_i r dr \quad (15)$$

式中的  $i$  对渗流边界求和。

### 3 程序框图

利用上述介绍的方法,编制了用有限元法分析大口井出水量的计算机程序。程序中采用了 4~8 变结点等参元,以适应各种不同形状的边界。解线性代数方程组采用了计算效率高,占内存少的波前法。整个程序是用 FORTRAN 语言编制的,并在 IBM-PC/XT 微机上调通过,程序框图如图 4。

### 4 算例

作为实际应用的例子,对文献[2]中给出的算例重新进行了计算,并与实测值和用流网法计算的结果进行了对比。

算例:湖北省蒲圻市某厂在层状含水层中建有—河床大口井,有关数据示意在图 5 中。试计算当抽水水位降落  $S=0.47\text{m}$  时的总出水量。

采用有限元法计算总出水量。利用对称性,取一半作为计算模型,对河床共划分 18 个 8 结点等参元,结点总数为 75,单元划分如图 5 所示。其中,BD,EF 和 FC 为不透水边界,AB 和 AC 为渗入水边界,其水头值为已知量,且等于  $15\text{m}$ ,ED 为渗出水边界,其水头值等于  $15 - 0.47 = 14.53\text{m}$ 。

有限元法计算的总渗流量为  $Q=2586\text{m}^3/\text{d}$ ,与实测值和流网法计算结果的对比见表 1。

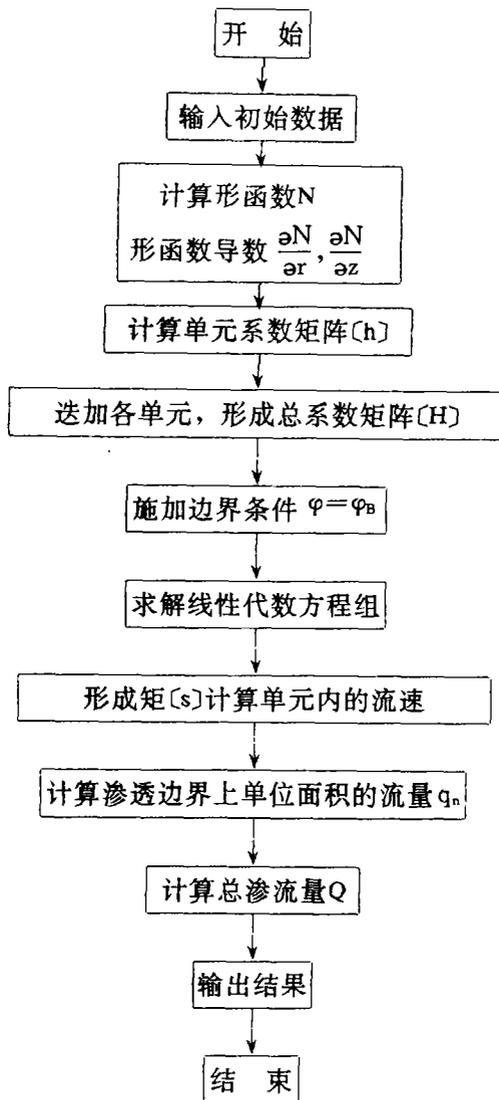


图 4

表 1

	有限元法	流网法	实测值
总渗流量 $Q$	$2586\text{m}^3/\text{d}$	2571	2662
误差	2.9%	3.4%	—

由计算我们还得知,抽水水位的降落与总出水量成线性关系,如图 6 所示。

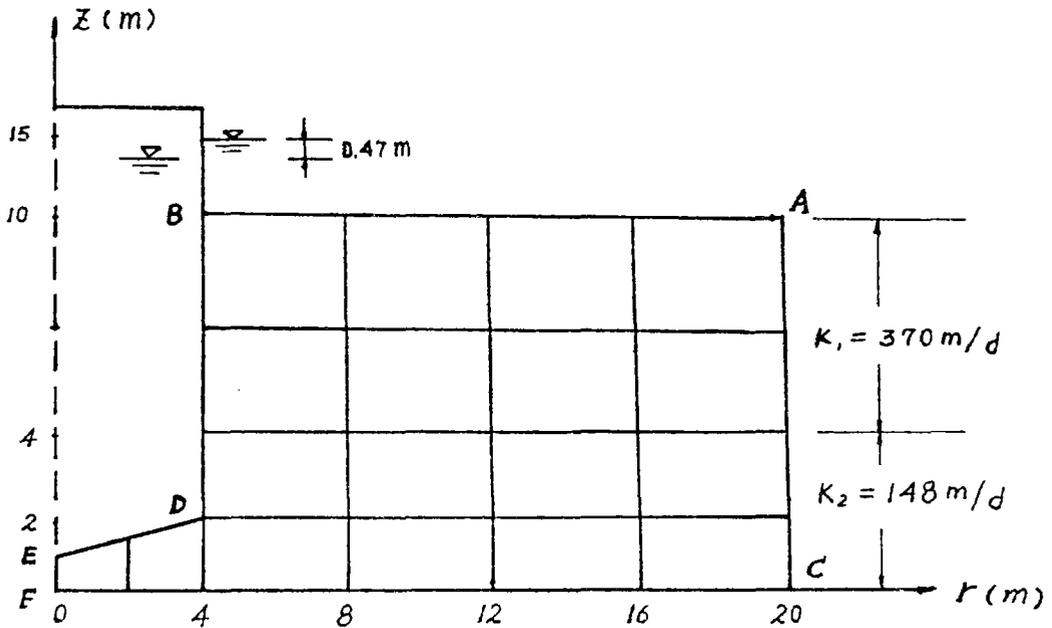


图 5

## 5 小 结

从上述计算可以看到,本文所介绍的方法精度较高(当单元剖分越小时,解将逐渐趋于精确解),且易于处理复杂边界和不同介质。此外,本方法除可计算总出水量外,还可计算流场分布及结点水头值。该方法现已程序化,并可在微机上计算,对一般工程技术人员,只要按照程序使用说明书输入初始数据,即可得到所求的结果,这无疑将给设计者在设计大口井和进行方案比较时带来极大的方便。

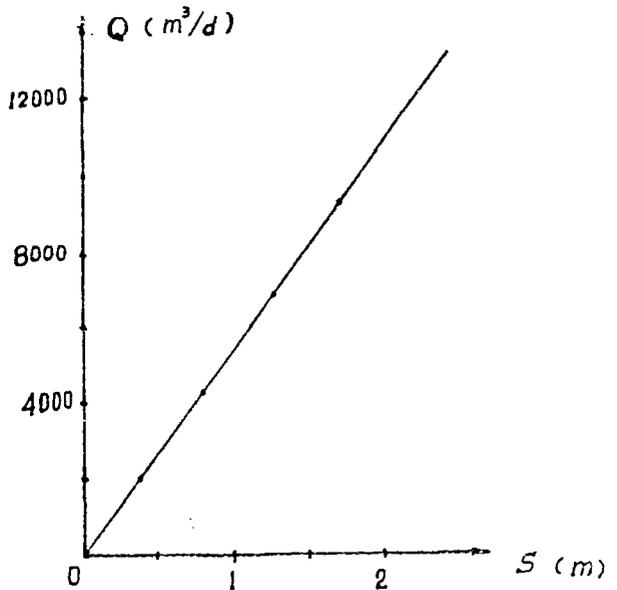


图 6

## 参 考 文 献

- [1] 同济大学主编. 给水工程. 北京: 中国建筑工业出版社, 1980; 1
- [2] 王允麒. 流网法计算河床渗井出水量的原理与方法. 中国给水排水, 1988; 1
- [3] 武汉水利电力学院水力学教研室编. 水力计算手册. 北京: 水利电力出版社, 1979
- [4] 朱伯芳. 有限单元法原理及其应用. 北京: 水利电力出版社, 1979
- [5] O. C. Zienkiwicz. *The Finite Element Method*. London: McGraw-Hill, 1977

## Computation of Open Well Infiltration Capacity with Numerical Method

Wang Quanjin

### Abstract

In the paper, the author comprehensively introduces and discusses computational principle and numerical method about open well infiltration capacity by finite element method. This method has the advantages of generality and high accuracy compared to traditional analytical method and graphic solution. It can be easily used to treat complicated boundary condition and infiltration problem in different media. As an example of application, open well infiltration capacity of river bed in laminar water bearing stratum located in a factory of Puqi, Hubei province is analyzed. The good agreement is obtained between calculated results and experiment data.

**Key words:** Open well, Infiltration capacity, Numerical computation