变质量非线性非完整系统的积分不变量*

罗绍凯

（河南商丘师专）

摘 要

本文研究变质量非线性非完整系统的积分不变量理论。首先，给出变质量非线性非完整非保守系统的正则方程；其次，研究系统作用量的非等时变分；而后，建立系统的基本积分变量关系，给出其保守力学系统的Poincare′—Cartan积分不变量和Poincare′通用积分不变量。

关键词：积分不变量；变质量系统；非完整约束；非等时变分

0 引 言

随着科学与技术的进步，变质量系统动力学的研究越来越重要。喷气飞机、火箭、卫星、航天器等一般都是变质量系统，有些是变质量的非完整约束系统。近些年来，梅凤翔、乔永芬等学者已经建立了多种形式的变质量非完整系统的运动方程[1-4]，但是其不变量理论还很少研究。不变量理论在现代力学、物理学和数学中具有重要的地位，受到越来越多的重视。

笔者在文〔5〕中给出了变质量非完整系统的微分不变量，本文进一步研究其积分不变量理论，给出变质量非线性非完整非保守系统的正则运动方程，计算系统作用量的非等时变分；建立变质量非线性非完整非保守系统的基本积分变量关系，给出相应保守系统的Poincare′—Cartan积分不变量和Poincare′通用积分不变量。

1 变质量非线性非完整非保守系统的正则方程

研究N个质点构成的变质量力学系统，其位形由广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$确定。第i个质点的质量$m_i=m_i(q_s,\dot{q}_s,t)$，时间dt内逸出或并入第i个质点的质元dm_i，dm_i相对于m_i的速度为

河南省自然科学基金资助项目

本文于1992年2月21日收到

$\vec{U}_i$。设变质量力学系统受有 9 个非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1}$$

在 четаев 条件下，系统的运动方程为[1]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+P_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (S=1,2,\cdots,n)\\&P_s=\sum_{i=1}^{N}\{\overrightarrow{\dot{m}_i}(\vec{u}_i+\dot{\vec{r}}_i)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s})\}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中 T 为系统的动能，λ_β 为待定乘子。把广义力 Q_s 分为保守和非保守的两部分，即

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+Q_s^1(q_s,\dot{q}_s,t)$$

方程（2）可以写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s'+P_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3}$$

其中 L＝T－V 为系统的 *Lagrange* 函数。

如果存在一函数 $W(q_s,\dot{q}_s,t)$，使[6]

$$P_s=\frac{\partial W}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{4}$$

方程（3）可写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s}=Q'_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5}$$

其中 $L'=L+W$，用 L＊表示把 $m_i(q_s,\dot{q}_s,t)$ 代入 L′ 所得的表达式，引进广义动量和 *Hamilton* 函数

$$P_s=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}, \qquad H^*(q_s,p_s,t)=\sum_{s=1}^{n}P_s\dot{q}_s-L^* \tag{6}$$

系统对应于（6）式的正则方程为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H^*}{\partial P_s}, \dot{P}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} + Q'_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

这就是变质量非线性非完整非保守系统的正则运动方程。

对于常质量的非线性非完整非保守系统，(7) 式写为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s}, \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s + \sum_{\beta=1}^{g} \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

对于完整保守的力学系统，进一步写为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial P_s}, \dot{P}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

2　变质量力学系统作用量的全变分

设运动的初始和终了时刻以及初始和终了坐标都不是固定的，而是参数 α 的函数，即

$$t_0 = t_0(\alpha), q_s^0 = q_s^0(\alpha); t_1 = t_1(\alpha), q_s^1 = q_s^1(\alpha)$$

且广义坐标、广义速度的初始值和终了值满足约束方程 (1)，即

$$f_\beta(q_s^0, \dot{q}_s^0, t_0) = 0, \quad f_\beta(q_s^1, \dot{q}_s^1, t_1) = 0$$

在这种情况下，变质量系统的 Hamilton 作用量

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L^* dt \qquad \text{的非等时变分为} \tag{10}$$

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} [\Delta L^* + L^* \frac{d}{dt}(\Delta t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{S=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial q_s} \delta q_s + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \delta \dot{q}_s) dt + L^* \Delta t |_{t_0}^{t_1} \tag{11}$$

考虑到等时变分 $\delta d q_s = d \delta q_s$，完成分部积分，得

$$\Delta W = \sum_{S=1}^{N} P_s \delta q_s |_{t_0}^{t_1} + L^* \Delta t |_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{S=1}^{N} (\frac{\partial L^*}{\partial q_s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}) \delta q_s dt \tag{12}$$

利用非等时变分与等时变分之间的关系[1]，有

$$\Delta q_s|_{t=t_k}=\delta q_s|_{t=t_k}+\dot{q}_s(t_k)\Delta t_k \qquad (k=0,1) \tag{13}$$

把（B)、(5）代入（12)，得

$$\Delta W=(\sum_{s=1}^{n}P_s\Delta q_s-H^*\Delta t)|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}(\frac{\partial L^*}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}+Q_s'$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt$$

在α值对应的路径都是真实路径（即正路）的情况下，我们有

$$\Delta W=\sum_{s=1}^{n}(p_s\Delta q_s-H^*\Delta t)|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}(Q_s'+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt \tag{14}$$

我们选取 $2n+1$ 维增广相空间，并在其中取一条任意的闭曲线 C_0，它的方程为

$$q_s=q_s^0(\alpha),P_s=P_s^0(\alpha),t=t_0(\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant p,s=1,2,\cdots,n)$$

这里 $\alpha=0$、$\alpha=\rho$ 是曲线 C_0 上的同一点。我们以曲线 C_0 上的每一点作为始点各引一条真实路径，便得到一个封闭的真实运动轨线管，即正路管

$$q_s=q_s(t,\alpha),P_s=P_s(t,\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant\rho,s=1,2,\cdots,n)$$

其中 $q_s(t,0)=q_s(t,\rho),P_s(t,0)=P_s(t,\rho)$。在此正路管上再任取一条闭曲线 C_1，使之包围正路管并和正路管上每根曲线仅有一个交点，曲线 C_1 的方程设为

$$q_s=q_s^1(\alpha),P_s=P_s^1(\alpha)t=t_1(\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant\rho,s=1,2,\cdots,n)$$

将（14）在［0，ρ］上积分，得

$$\begin{aligned}0=W(\rho)-W(0)&=\int_0^\rho[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H^*\Delta t]|_{t_0}^{t_1}-\int_0^\rho\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt\\&=\oint_{c_1}[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H^*\Delta t]-\oint_{c_0}[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H^*\Delta t]-\int_{t_0}^{t_1}\oint_c\sum_{s=1}^{n}(Q_s'\\&\quad+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s dt\end{aligned} \tag{15}$$

考虑 t_0、t_1 的任意性，这里 C 是包围正路管且与每根轨线仅有一个交点的闭曲线，即为

$$q_s=q_s(\alpha),P_s=P_s(\alpha),t=t(\alpha) \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant\rho,s=1,2,\cdots,n)$$

将（13）两端同除以 $(t_1 - t_0)$，并取极限，有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\oint_{c_1}[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s - H^*\Delta t] - \oint_{c_0}[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s - H^*\Delta t]}{t_1 - t_0}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{t_0}^{t_1}\oint_c\sum_{s=1}^{n}(Q'_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s}{t_1 - t_0}$$

应用中值定理，得到关系式

$$\frac{d}{dt}I = \oint_c\sum_{s=1}^{n}(Q'_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s \tag{16}$$

其中

$$I = \oint_c[\sum_{s=1}^{n}P_s\Delta q_s - H^*\Delta t] \tag{17}$$

表示变质量系统的 *Poincaré* = *Cartan* 积分。

3　变质量非线性非完整系统的积分变量关系与积分不变量

定理 1　若曲线 C 是围绕变质量非线性非完整非保守系统的正路管的任意闭曲线，则沿此曲线存在 *Poincaré* − *Cartan* 型积分变量关系（16）。如果系统的主动力、约束力均为保守力，则有 *Poincaré* − *Cartan* 型积分不变量，即 I＝常量。

如果曲线 C 是由系统的同时状态组成，则 $\Delta t = o$，于是有

定理 2　若围绕变质量非线性非完整非保守系统的正路管的闭曲线 C，是由该系统的同时状态所组成，则沿此曲线存在 *Poincaré* 型积分变量关系

$$\frac{d}{dt}I_1 = \oint_c\sum_{S=1}^{N}(Q'_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s})\delta q_s \tag{18}$$

其中

$$I_1 = \oint_c\sum_{s=1}^{n}P_s\delta q_s \tag{19}$$

为变质量系统的 Poincaré 积分。如果系统的主动力、约束力均为保守力，则有 Poincaré 型积分不变量，即 I_1＝常量。

由本文定理可知：对于非完整非保守系统，不存在文〔7〕的 Poincaré—Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量。

对于常质量力学系统，有

$$P_t = 0, \qquad L^* = L, \qquad H^* = H$$

定理 1、定理 2 自然成立。

对于常质量完整非保守系统的运动，由本文定理得到文〔8〕中定理 1 和定理 2。对于常质量非完整保守系统的运动，由本文定理得到文〔9〕的结果。本文的定理具有一般意义。

参 考 文 献

〔1〕梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京：北京工业学院出版社，1985：399—418，51—58。

〔2〕梅凤翔. 非完整动力学研究. 北京：北京工业学院出版社，1987：70—125

〔3〕乔永芬. 应用数学和力学，1990；11（10）：911—920

〔4〕罗绍凯. 新疆大学学报，1990；7（3）：49—55

〔5〕Luo Shaokai（罗绍凯）. Chinese Science Bulletin，1991；36（22）；1930—1932

〔6〕杨来伍，梅凤翔. 变质量系统力学。北京：北京理工大学出版社，1989：273。

〔7〕张解放. 黄淮学刊，1990；6（1）：35—39。

〔8〕刘　端. 力学学报，1991；23（5）：617—625。

〔9〕Djukic，Dj. S.，Acta Mechanica，1975；（23）：291－296.

Integral Invariant in Variable Mass Nonlinear Nonholonomic Systems

Luo Shaokai

Abstract

This paper studies integral invariant theory in Variable mass nonlinear nonholonolmic system. First, the canonical equations of variable mass nonlinear nonholonomic nonconservative system are obtained. And then, the nonisochronic variation of action are studied. Finally, the basic integral variants in variable mass nonlinear nonholonomic nonconservative system are extended; and the integral invariant of poincaré and Cartan and the universal integral invariant of poincare are obtained.

Key words: integral invariant; variable mass system; nonholonomic constraint; nonisochronic variation.