

关于非保守 Q 过程的一点注记

蒋兆峰

(基础课部)

摘 要

设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为全稳定 Q 矩阵, 本文在 Q 为有限流出的条件下 (去掉了有限非保守的限制), 给出了全部 Q 过程的构造。

关键词: Q 过程; 非保守

矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

称为全稳定 Q 矩阵, 如果

$$\begin{aligned} 0 \leq q_i \equiv -q_{ii} < +\infty \quad (i \in E), \\ 0 \leq q_{ij} < +\infty \quad (i \neq j), \quad q_i \geq -\sum_{j \neq i} q_{ij} \quad (i \in E) \end{aligned} \quad (1)$$

记 $d_i = q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij} \quad (i \in E)$, 当 $d_i = 0$, 称状态 i 为 Q 矩阵的保守状态; 当对所有 $i \in E$, 有 $d_i = 0$, 则称 Q 为保守 Q 矩阵。

定义 1: 如果存在一个马尔可夫链 $P(t) = (P_{ij}(t); i, j \in E)$, 使

$$P_{ij}'(0) = q_{ij} \quad (i, j \in E)$$

则称 $P(t) = (P_{ij}(t); i, j \in E)$ 及其拉氏变换 $\phi(\lambda) = (\phi_{ij}; i, j \in E)$ 为 Q 过程。

定义 2: 设 I 为单位矩阵, u 为无穷维列向量, m 为列向量空间, 方程组

$$\begin{cases} (\lambda I - Q)u = 0 \\ 0 \leq u \in m \end{cases} \quad (2)$$

的解空间记为 μ_λ^+ 。众所周知, 其维数 n 与 λ 无关, 当 n 有限时, 称 Q 为有限流出的给定 Q 矩阵,

本文于 1992 年 3 月 26 日收到

如何构造全部Q过程,一直是Q过程研究的难题.在Q为有限非保守、有限流出的条件下,杨向群(参见[1])给出了全部Q过程的构造.本文利用陈安岳建立的一种新方法——禁止概率法,将具有任意个非保守状态的Q矩阵化为只含有一个非保守状态的Q矩阵,在Q矩阵为有限流出的条件下,很容易就构造出了全部Q过程.

引理1: 设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为有限流出的全稳定Q矩阵,不妨记为 n 流出的,则矩阵

$$Q_{b \cup E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ d_1 & q_{11} & q_{12} & \cdots & \cdots \\ d_2 & q_{21} & q_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (3)$$

为只有一个非保守状态、 n 流出的Q矩阵,其中 $d_i = -\sum_{j \in E} q_{ij}$ ($i \in E$),以后简记 $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$,注意 $q_{bj} = 0$, ($j \in E$)

证明: 显然, $Q_{b \cup E}$ 只有第一行的行和不为零,所以 $Q_{b \cup E}$ 只有一个非保守状态.

对于 $Q_{b \cup E}$ 解方程组 (2), 将其展开得

$$\begin{cases} (\lambda + 1)u_b = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \lambda u_i - \sum_{j \in E} q_{ij}(u_j - u_b) = 0 \quad (i \in E) \end{cases} \quad (5)$$

由 (4) 式 $u_b = 0$, (注意 $\lambda > 0$), (5) 式变为

$$\lambda u_i - \sum_{j \in E} q_{ij} u_j = 0 \quad (6)$$

而 (6) 式正是 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 的流出解方程,解空间的维数,假设为 n . 所以 $Q_{b \cup E}$ 的流出解空间的维数也为 n . 证毕.

引理2: 设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为一个全稳定Q矩阵,设它的Q过程为 $\psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda); i, j \in E)$, 则:

(I) 令 $\xi(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \dots)^T$, 其中 $\xi_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_j \psi_{ij}(\lambda)$ ($i \in E$), 则 $\xi(\lambda)$ 满足

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\psi(\lambda)\xi(\mu) \quad (7)$$

$$(I) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(1 - \lambda \sum_j \psi_{ij}) = - \sum_j q_{ij} \quad (i \in E) \quad (8)$$

证明: (i) 可以记 $\xi(\lambda) = 1 - \lambda \psi(\lambda)1$, 由于 $\psi(\lambda)$ 是Q过程, 所以满足预解方程:

$$\psi(\lambda) - \psi(\mu) = (\mu - \lambda)\psi(\lambda)\psi(\mu) \quad (9)$$

由 (9) 易得 (7):

(II) 仍由 $\psi(\lambda)$ 是Q过程, 所以满足Q条件:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \psi_{ij}(\lambda) = q_{ij} \quad (i \neq j) \quad (10)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(1 - \psi_{ii}(\lambda)) = -q_{ii} \quad (i \in E) \quad (11)$$

由〔1〕中定理 1、8.2 的证明过程不难看出, (10) 中让 i 固定, 收敛过程对 j 是一致的, 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} \lambda^2 \psi_{ij}(\lambda) = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^2 \psi_{ij}(\lambda) = \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in E}} q_{ij} \quad (12)$$

由 (11)、(12) 得证 (8) 式。证毕。

定理: 设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为一个有限流出的全稳定 Q 矩阵, $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$ 的意义与引理 1 相同, 则相对于 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 的全部 Q 过程可以由 $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$ 的 Q 过程得到。

证明: 以下证明用到的是陈安岳的禁止概率法 (参见〔2])。

首先, 对于 $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$, 由引理 1 它是只含有一个非保守、有限流出的 Q 矩阵, 其相应的 Q 过程的构造已经解决 (参见〔1]), 不妨设为 $R(\lambda) = (R_{ij}(\lambda); i, j \in b \cup E)$, 相应的转率概率函数为 $P(t) = (P_{ij}(t); i, j \in b \cup E)$, 按〔2〕的禁止概率法, 令 ${}_bP(t) = \{{}_bP_{ij}(t); i, j \in b \cup E\}$, 则 ${}_bP(t)$ 是 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 的 Q 过程, 而 ${}_bP(t)$ 为〔4〕I § 11 定义的禁止概率。其拉氏变换记为 $\psi_b(\lambda)$ 。(以后记 $\psi(\lambda) = {}_bR(\lambda)$, 称 $\psi(\lambda)$ 为 $R(\lambda)$ 的限制。)

反之, 对于 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 的任意一个 Q 过程 $\psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda); i, j \in E)$, 总有一个 $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$ 的 Q 过程 $R(\lambda)$ 存在, 使得 $\psi(\lambda) = {}_bR(\lambda)$ 。事实上, $R(\lambda)$ 可由如下方法得到, 令

$$R(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda+1} & 0 \\ \frac{1}{\lambda+1} \cdot \xi(\lambda) & \psi(\lambda) \end{bmatrix}$$

其中 $\xi(\lambda) = 1 - \lambda \psi(\lambda)1$, 由引理 2 不难直接验证 $R(\lambda)$ 满足规范条件、预解方程、连续条件和 Q 条件, 即 $R(\lambda)$ 是 $Q_{b \cup E} = (q_{ij}; i, j \in b \cup E)$ 的 Q 过程, 而且显然 $\psi(\lambda) = {}_bR(\lambda)$ 。证毕。

参 考 文 献

- 〔1〕 杨向群. 可列马尔可夫过程概论. 长沙: 湖南科技出版社, 1981
- 〔2〕 陈安岳. 带瞬时态 Q 过程的构造问题. 数学年刊, 1987; 8A (1)
- 〔3〕 侯振挺, 郭青峰. 齐次可列马尔可夫过程. 北京: 科学出版社, 1978
- 〔4〕 K. L. Chung. Markov Chains With Stationary Transition Probabilities. Springer-Vorlag New York INC. 1967

The Note on Inconservative Q -processes

Jiang Zhaofeng

Abstract

When $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ is a Q -matrix with finite exit boundaris, the complete Construc-
tion of Q -processes is given.

Key words: Q -processes; inconservative