

Fuzzy S-闭空间

汪火云

(基础课部)

摘 要

本文在 Fuzzy 拓扑空间上引进了 S-闭空间的定义,并讨论了它的性质。

关键词: Fuzzy 拓扑; Fuzzy 极不连通; Fuzzy S-闭空间

T. Thompson 于 [1] 中引进了 S-闭空间的概念,王国俊于 [2] 中给出了 S-闭空间的一个等价定义。本文依照 [2] 的定义,给出了 Fuzzy 拓扑空间中的 S-闭空间的概念。

设 (X, J) 表示一个 Fuzzy 拓扑空间,有时简记为 X ,为了方便,先叙述有关术语。

定义 1^[3] 设 A 是 (X, J) 中的任意 Fuzzy 集。(i) A 是 Fuzzy 正则闭的,若 $A = Cl(Int A)$; A 是 Fuzzy 正则开的,若 $A = Int(Cl A)$ 。有时简称正则闭、正则开。

命题 1 (i) A 是 Fuzzy 正则开集 $\Leftrightarrow A'$ 是 Fuzzy 正则闭集; (ii) Fuzzy 开集的闭包是 Fuzzy 正则闭集; (iii) Fuzzy 闭集的内部是 Fuzzy 正则开集。

见 [3] 中定理 5. 2, 定理 5. 6。

定义 2 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间,如果 X 中的每个开集的包仍是开集,则称 X 为 Fuzzy 极不连通的空间。

例 1 设 X 是一个非空的集,令 $0, \frac{1}{2}, 1$ 分别代表 $X \rightarrow I$ 值为 $0, \frac{1}{2}, 1$ 的常值映射。

令 $J = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, 则 (X, J) 是一个 Fuzzy 拓扑空间。由于 $\left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2}$ 是既开又闭的集。显然 (X, J) 是 Fuzzy 极不连通的。

定理 1 设 X 是 Fuzzy 拓扑空间,则下列条件等价:

- (I) X 是 Fuzzy 极不连通的。
- (II) X 中 Fuzzy 开集的包仍是 Fuzzy 开集。
- (III) X 中 Fuzzy 正则闭集是 Fuzzy 开集。
- (IV) X 中 Fuzzy 正则开集是 Fuzzy 闭集。

证 (I) $\Leftrightarrow$ (II) 显然的。

(II) $\Rightarrow$ (III) 显然的。

(III) $\Rightarrow$ (IV) 设 A 是 X 中任意 Fuzzy 正则开集,则 A' 是 Fuzzy 正则闭集,由

本文于 1992 年 2 月 25 日收到

(Ⅲ) 知 A' 是 Fuzzy 开集, 故 A 是 Fuzzy 闭集, 即 (N) 成立. (N) $\Rightarrow$ (Ⅲ) 设 A 是任意 Fuzzy 正则闭集, 则 A' 是 Fuzzy 正则开集, 由 N 知 A' 是 Fuzzy 闭集, 故 A 是 Fuzzy 开集即 (Ⅲ) 成立.

(Ⅲ) $\Rightarrow$ (I) 设 A 是任意 Fuzzy 开集, 则 ClA 是 Fuzzy 正则闭集, 由 Ⅲ 知 ClA 是开集, 即 (I) 成立.

定义 3 (X, J) 叫做 Fuzzy H (i) 的, 是指从 X 中的每一个开复盖 A 中, 都可从 $\bar{A} = \{ClA: A \in A\}$ 中选出有限的子复盖.

注: Fuzzy 紧空间是 Fuzzy H (i) 空间.

定义 4 (X, J) 叫做 Fuzzy S-闭空间, 是指从 X 中的每一个 Fuzzy 正则闭复盖中都能选出 X 的有限子复盖.

注: 例 1 所描述的拓扑空间就是一个 Fuzzy S-闭空间.

定理 2 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, 则下列条件等价:

(I) X 是 Fuzzy S-闭空间.

(I) 从 X 中的每一个 Fuzzy 正则闭复盖中可选出 X 的有限子复盖.

(Ⅲ) X 中的每一个具有有限交性质的 Fuzzy 正则开的集簇交非空.

证 (I) $\Leftrightarrow$ (I) 显然的.

(I) $\Leftrightarrow$ (Ⅲ) (I) 的逆否命题是: 如果一簇 Fuzzy 正则闭集 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 中的任意有限个都不能构成 X 的复盖, 则 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 也不构成 X 的复盖. 由 Demorgan 对偶原理及命题 1 知, 等于说 $\{P'_\alpha: \alpha \in A\}$ 是 X 的具有有限交性质的 Fuzzy 正则开的集簇, 则它们的交非空.

定理 3 设 X 是 Fuzzy 极不连通的空间, 则 X 是 Fuzzy S-闭的 $\Leftrightarrow X$ 是 Fuzzy H (i) 的.

证 设 X 是 Fuzzy 极不连通的.

如果 X 是 Fuzzy S-闭空间, A 是 X 的开复盖, 则 $\bar{A} = \{ClA: A \in A\}$ 是 X 的正则闭复盖, 故从 $\bar{A}$ 中能选出 X 的有限子复盖即 X 是 H (i) 空间.

如果 X 是 H (i) 空间, A 是 X 的正则闭复盖, 由于 X 是 Fuzzy 极不连通的, 故 A 是 X 的开复盖且 $A = \bar{A}$, 故从 $\bar{A}$ (即 A) 中可选出 X 的有限子复盖, 故 X 是 Fuzzy S-闭空间.

推论 Fuzzy 极不连通的 Fuzzy 紧空间是 Fuzzy S-闭空间.

定义 5⁽⁴⁾ Fuzzy 拓扑空间 X 叫做正则空间, 如果每一个 Fuzzy 开集 U 都可以表示为一簇开集 $\{V_t: t \in T\}$ 之并, 且 $\forall t \in T, ClV_t \subset U$, 即 $U = \bigcup \{V_t: t \in T\} = \bigcup \{ClV_t: t \in T\}$

定义 5 的等价定义: (X, J) 叫做正则的, 如果 X 中的每一个 Fuzzy 开集都可以表示为一簇正则闭集之并.

注: 从 [5] 中知, 定义 6 所定义的正则性是条件较弱的一种定义.

定理 4 Fuzzy S-闭的正则空间是 Fuzzy 紧空间.

证 设 A 是 Fuzzy 拓扑空间 X 的一个开复盖, 由于 X 是正则的, $\forall A \in A, A$ 都可表为一簇 Fuzzy 正则闭集之并, 从而得到 X 的一个 Fuzzy 正则闭复盖 B , 由 X 是 Fuzzy S-闭的, 从 B 中可选出 X 的有限子复盖, 进而从 A 中亦可选出 X 的有限子复盖即 X 为 Fuzzy 紧空间.

定义 6 设 f 是 $(X, U) \rightarrow (Y, J)$ 的 Fuzzy 映射, 如果对 Y 中每个正则闭集 P, f^{-1}

$\mathcal{P}$ 都是 X 中的正则闭集之并, 则 f 叫 Fuzzy S-连续映射。

定理 5 设 f 是由 $X \rightarrow Y$ 的满射导出的 $(X, U) \rightarrow (Y, J)$ 的 Fuzzy S-连续映射, 若 (X, U) 是 Fuzzy S-闭的, 则 (Y, J) 亦是 Fuzzy S-闭的。

证 设 A 是 Y 的 Fuzzy 正则闭复盖, $\forall A \in \mathcal{A}$, $f^{-1}[A]$ 为 X 中 Fuzzy 正则闭集之并, 故 $f^{-1}[A] = \bigcup \{f^{-1}[A]; A \in \mathcal{A}\}$ 为 X 中 Fuzzy 正则闭复盖。

事实上, $\forall x \in X, \bigcup \{f^{-1}[A](x); A \in \mathcal{A}\} = \sup \{A(f(x)); A \in \mathcal{A}\} = 1$ 。即 $f^{-1}[A]$ 是 X 的复盖。

由于 X 是 S-闭的, 故从 $f^{-1}[A]$ 中可选出 X 的有限子复盖, 不妨设这些正则闭复盖被包含在 $f^{-1}[A_1], f^{-1}[A_2], \dots, f^{-1}[A_n]$ 中, 从而 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 Y 的有限子复盖, 因为:

$$Y = f[X] = f[\bigcup_{i=1}^n f^{-1}[A_i]] = \bigcup_{i=1}^n f[f^{-1}[A_i]] \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$$

故 Y 为 Fuzzy S-闭空间

定义 7⁽⁶⁾ 设 (X, J) 是一个 Fuzzy 拓扑空间, $Y \subset X$, 令 $U = \{A \cap Y; A \in J\}$, 则 U 是 Y 上的一个拓扑。这个拓扑称 J 相对于 Y 的相对拓扑, (Y, U) 称为 (X, J) 的子空间。

注: (Y, U) 中的一个子集 A 实际上看成在 $X \sim Y$ 处取零值的 X 上的一个 Fuzzy 集。

引理 1 设 (X, J) 是一个 Fuzzy 拓扑空间, $M \subset X$, (M, U) 是 (X, J) 的子空间, 若 M 是 X 中的开且闭集, 则对 M 中的任意 Fuzzy 集 A , 有:

$$(I) \quad Int_M(A) = Int_x(A)$$

$$(II) \quad Cl_M(A) = Cl_x(A)$$

证 (I) $Int_M(A) = \bigcup \{B \cap M; B \in J \text{ 且 } B \cap M \subset A\}$; $Int_x A = \bigcup \{B'; B' \in J \text{ 且 } B' \subset A\}$ 。只要证上述两个集簇并相同即可。

$\forall B \in J$ 且 $B \cap M \subset A$, 由于 M 是 X 中 Fuzzy 开集, 故 $B \cap M \in J$, 故 $B \cap M \in \{B'; B' \in J \text{ 且 } B' \subset A\}$, 因而 $\bigcup \{B \cap M; B \in J \text{ 且 } B \cap M \subset A\} \subset \bigcup \{B'; B' \in J \text{ 且 } B' \subset A\}$ 。

反之, $\forall B' \in J$ 且 $B' \subset A$, 由于 $B' \subset A \subset M$, 故 $B' \cap M = B' \subset A$, 因而 $B' \in \{B \cap M; B \in J \text{ 且 } B \cap M \subset A\}$ 即 $\bigcup \{B'; B' \in J \text{ 且 } B' \subset A\} \subset \bigcup \{B \cap M; B \in J \text{ 且 } B \cap M \subset A\}$ 。

(I) 成立。

(II) 由 [6] 中定理 3.1 知, $Cl_M A = Cl_x A \cap M$, 故 $Cl_x A \supset Cl_M A$ 。由于 M 是 X 中闭的且 $M \supset A$, $Cl_x A \supset A$, 知 $Cl_M A = Cl_x A \cap M \supset A$, 且 $Cl_x A \cap M = Cl_M A$ 是 X 中闭集, 又由 $Cl_x A = \bigcap \{F; F \in J \text{ 且 } F \supset A\}$ 的定义知, $Cl_M A \in \{F; F \in J \text{ 且 } F \supset A\}$, 故 $Cl_M A \supset Cl_x A$ 即 (II) 成立。

引理 2 设 (M, U) 是 (X, J) 的一个 Fuzzy 子空间。若 M 是 X 中的开且闭集, 则若 A 是 M 中的 Fuzzy 正则闭集 (Fuzzy 正则开集), 则 A 亦是 X 中的 Fuzzy 正则闭集 (Fuzzy 正

则开集)。

证 设 $A \subset M$, A 是 M 中的正则闭集, 则有 $A = Cl_M (Int_M A) = Cl_x (Int_x A)$ (引理 1), 故 A 是 X 中的正则闭集。若 A 是 M 中正则开集时, 类似可证。

定理 6 设 (M, U) 是 (X, J) 的一个 Fuzzy 子空间, 且 M 是开且闭集。若 X 是 Fuzzy S-闭的, 则 M 亦是 Fuzzy S-闭的。

证 设 A 是 M 的正则闭复盖, 由引理 2 知 A 亦是 X 中的正则闭集簇, 由 M' 是开且闭集知 M' 是 X 中的正则闭集。显然 $A \cup M'$ 是 X 的一个正则闭复盖。由于 X 是 Fuzzy S-闭的, 故存在 $A \cup M'$ 的有限子簇 B 复盖 X , 假设 B 中不含有 M' (实际上删去 M'), 显然 $B \subset A$, B 是从 A 中选出的 M 的 Fuzzy 正则闭复盖, 故 M 是 S-闭的。

设 $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in D\}$ 是两两不交的 Fuzzy 拓扑空间, 令 $X = \bigcup \{X_i \mid i \in D\}$, 又令

$$\bigoplus_{i \in D} \tau_i = \{A \mid A \in I^X \text{ 且 } \forall i \in D, A \cap X_i \in \tau_i\}$$

定义 8⁽⁶⁾ 如上表示的 X 上的拓扑 $\bigoplus_{i \in D} \tau_i$ 称为和拓扑。 $(X, \bigoplus_{i \in D} \tau_i)$ 称为和拓扑空间, 有时简记为 $\bigoplus_{i \in D} X_i$ 。

定理 7 设 (X_i, τ_i) , $i=1, 2$ 是不交的 Fuzzy S-闭空间, 则 $X_1 \oplus X_2$ 亦是 Fuzzy S-闭空间。

证 设 A 是 $X = X_1 \oplus X_2$ 的 Fuzzy 正则闭复盖, 则 $\forall i=1, 2, A|_{X_i} = \{A \cap X_i \mid A \in A\}$ 是 X_i 的 Fuzzy 正则闭复盖。

因为 1°

$$\begin{aligned} A \cap X_i &= [Cl_X Int_X A] \cap X_i \\ &= Cl_{X_i} (Int_{X_i} A \cap X_i) \quad (\text{利用重域不难证出}) \end{aligned}$$

由于 $Int_X A$ 开于 X , 故 $Int_X A \cap X_i$ 开于 X_i 。又由命题 1 知, $A \cap X_i$ 是 X_i 中的 Fuzzy 正则闭集。

2° $\bigcup \{A \cap X_i \mid A \in A\} = (UA) \cap X_i = X \cap X_i = X_i, \forall i=1, 2$ 。故 $A|_{X_i}$ 是 X_i 的复盖。

由于 X_i 是 Fuzzy S-闭的, 故对 $A|_{X_i}$, 分别存在有限子复盖 $\{A_1 \cap X_1, \dots, A_n \cap X_1\}, \{A'_1 \cap X_2, \dots, A'_m \cap X_2\}$ 。则 $\{A_1, A_2, \dots, A_n; A'_1, A'_2, \dots, A'_m\}$ 是 A 的有限子簇且复盖 X , 故 X 是 Fuzzy S-闭的。

定理 7 说明 Fuzzy S-闭空间的有限和是 Fuzzy S-闭空间。

参 考 文 献

- [1] T. Thompson. S-closed spaces proc. Amer Math. soc. 60 (1976), 335—338
- [2] 王国俊. S-闭空间的性质. 数学学报, 1981 (1): 55—63
- [3] K. K. AZAD. On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost continuity and Fuzzy Weakly continuity. J. Math. Anal. Appl. 1981 (82): 14—32
- [4] B. Hutton, I. Reilly. Separation Axioms in Fuzzy Topological spaces, Fuzzy sets and systems, 1980 (3): 93—104
- [5] 朱永庚. Fuzzy 拓扑空间正则性的几种定义及其关系. 陕西师大学报, 1984 (4): 77—

- [6] M. H. GHANIM Separation Axioms, subspaces and Sums in Fuzzy Topology. J. Math. Anal. Appl. 1984 (102): 189—202

Fuzzy S—closed Spaces

Wang Huoyun

Abstract

In this paper we introduce a definition for S—closed spaces in Fuzzy topology and discuss its properties.

Key Words: Fuzzy Topology; Fuzzy Extremely Disconnected; Fuzzy S—closed spaces.