

Fuzzy S-集, Fuzzy S-闭包和 Fuzzy S-内核

汪火云

(基础课部)

摘 要

本文在 Fuzzy 拓扑空间上引进了 Fuzzy S-集, Fuzzy S-闭包和 Fuzzy S-内核的概念, 并利用它们来研究 Fuzzy S-闭空间和 Fuzzy S-连续映射。

关键词: Fuzzy S-集; Fuzzy S-闭包; Fuzzy S-内核; Fuzzy S-闭空间; Fuzzy S-连续映射。

R. F. Dickma, Jr and R. L. Krystorck 于文献[1]中给出了 S-集及 S-闭包的概念, 恽自求于文献[6]中对之作作了进一步研究, 陈清煊于文献[2]中给出了 S-内核的概念。本文在 Fuzzy 拓扑空间上引进了 Fuzzy S-集, Fuzzy S-闭包, Fuzzy S-内核的概念, 并以此来研究 Fuzzy S-闭空间和 Fuzzy S-连续映射。在本文中 (X, J) 表示一个 Fuzzy 拓扑空间, 无特殊说明, A 通常表示一个 Fuzzy 集。

1 预 备

为行文方便重新叙述有关术语和命题。

定义 1.1^[1] 设 A 是 Fuzzy 拓扑空间 (X, J) 中的一个 Fuzzy 集

(a) A 称为 Fuzzy 半开集, 若存在 $V \in J$, 使 $V \subset A \subset ClV$. 有时简称为半开集。

(b) A 称为 Fuzzy 半闭集, 若存在 $V' \in J$, 使 $Int V' \subset A \subset V'$, 有时简称为半闭集。

关于 Fuzzy 半开集, Fuzzy 半闭集有下面重要性质:

命题 1.1^[1] 设 A 是 (X, J) 中的 Fuzzy 集, 则下面论断等价

(a) A 是 Fuzzy 半闭的

(b) A' 是 Fuzzy 半开的

(c) $Int Cl A \subseteq A$

(d) $Cl Int A' \supseteq A'$

[3] 中定理 4.2

本文于1992年3月10日收到

命题1.2^[3] 任意 Fuzzy 半开集之并是 Fuzzy 半开集;任意 Fuzzy 半闭集之并是 Fuzzy 半闭集。

[3]中定理4.3

定义1.2^[3] 设 A 是 (X, J) 中的 Fuzzy 集。

(I) A 称为 Fuzzy 正则开的,若 $A = \text{Int}(\text{cl}A)$

(II) A 称为 Fuzzy 正则闭的,若 $A = \text{Cl}(\text{Int} A)$

Fuzzy 正则开, Fuzzy 正则闭有时简称为正则开, 正则闭。它们有如下重要性质:

命题1.3^[3] A 是 Fuzzy 正则开集 $\Leftrightarrow A'$ 是 Fuzzy 正则闭集; Fuzzy 开集的闭包是 Fuzzy 正则闭集; Fuzzy 闭集的内核是 Fuzzy 正则开集。

[3]中定理5.2, 定理5.6

定义1.3^[4] (X, J) 称为 Fuzzy 极不连通空间, 若 X 中每个 Fuzzy 开集的包仍是开集。

命题1.4^[4] 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, 下面论断等价:

(a) X 是 Fuzzy 极不连通的

(b) X 中正则闭集是开 q 的

(c) X 中正则开集是闭的

定义1.4 (X, J) 的集簇叫 Fuzzy 中心集簇(具有有限交性质), 若该集簇任意有限个成员之交非空。

定义1.5^[4] Fuzzy 拓扑空间 (X, J) 称为 Fuzzy S -闭的, 若从 X 中的每个正则闭复盖中都可选出有限子复盖。

命题1.5^[4] (X, J) 是 Fuzzy S -闭的 $\Leftrightarrow X$ 中的每一个具有有限交性质的正则开集簇之交非空。

定义1.6^[5] (X, J) 称为 Fuzzy 正则的, 若 X 中的每个 Fuzzy 开集都可以表示为一簇正则闭集之并。等价提法: X 中的每个 Fuzzy 闭集都可以表示为一簇正则开集之交。

定义1.7 仅在点 $x \in X$ 处取值 $\lambda > 0$, 在其余点取值为零的 Fuzzy 集称作 X 上的 Fuzzy 点, 记作 x_λ , 点 x 称作它的承点。

2 Fuzzy S -集

定义2.1 设 A 是 (X, J) 的 Fuzzy 集, 称 A 为 Fuzzy S -集。如果对 X 中复盖 A 的任一正则闭集簇有有限子簇复盖 A , 有时简称 S -集。

引理2.1 Fuzzy 正则闭集是闭的 Fuzzy 半开集; Fuzzy 半开集的包是 Fuzzy 正则闭集。

证明 设 A 是正则闭集, 则 $A = \text{cl} \text{Int} A$ 。故 $\text{Int} A \subset A \subset \text{cl} \text{Int} A$ 即 A 是闭的半开集。

若 A 是半开集, 则存在开集 V , 使 $V \subset A \subset \text{cl} V$, 故 $\text{cl} A = \text{cl} V$ 即 $\text{cl} A$ 是 Fuzzy 正则闭集。

引理2.2 设 (U, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, 分明集 $U \subset X$ 且 U 作为 X 中的 Fuzzy 集是开的, 则有:

(a) A 为 X 中的 Fuzzy 半开集, 则 $A \cap U$ 为子空间 U 中的 Fuzzy 半开集。

(b) A 为 X 中的 Fuzzy 正则闭集, 则 $A \cap U$ 为子空间 U 中的 Fuzzy 正则闭集。

(c) A 为子空间 U 中的 Fuzzy 半开集, 则 A 为 X 中的 Fuzzy 半开集。

证明 (a) 设 A 为 X 中的半开集, 则存在 $V \in \mathcal{J}$ 使 $V \subset A \subset \text{cl}V$, 故 $V \cap U \subset A \cap U \subset \text{cl}V \cap U$ 显然 $V \cap U$ 是子空间 U 中的开集, $\text{cl}V \cap U$ 是 $V \cap U$ 于子空间 U 中的闭包, 故 $A \cap U$ 为子空间 U 的半开集。

关于“ $\text{cl}V \cap U$ 是 $V \cap U$ 于子空间 U 中的闭包”说明

$$U = \begin{cases} 1 & y \in \text{Supp}U \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad U \subset X$$

$$\text{cl}_U(V \cap U) = \text{cl}(V \cap U) \cap U \subset \text{cl}V \cap \text{cl}U \cap U = \text{cl}V \cap U$$

现证明上述反包含也成立即可。

$\forall x_1 \in \text{cl}V \cap U$, 由于 $x_1 \in U$, 故 $x \in \text{Supp}U$. 因而 U 亦是 x_1 的开重域 ($\because \lambda + 1 > 1$)

由于 $x_1 \in \text{cl}V$, 故对 x_1 的任一开重域 W , W 与 V 相重. 由重域性质知: $W \cap U$ 亦是 x_1 的开重域, 因而 $W \cap U$ 亦与 V 相重。

由于 $W \cap U$ 于 $Y \in \text{Supp}U$ 处取值为零, 故 $W \cap U$ 与 V 仅在 $\text{Supp}U$ 中的点相重. 设存在 $y \in \text{Supp}U$ 使 $W(y) \wedge U(y) + V(y) > 1$, 由于 $U(y) = 1$, 故有 $W(y) + V(y) > 1$. 从而 $W(y) > 0$, 因此 $W(y) + U(y) > 1$ ($\because U(y) = 1$)

进而有: $W(y) + V(y) \wedge U(y) > 1$, 即 W 与 $U \cap V$ 相重, 故 $x_1 \in \text{cl}(U \cap V)$. 反包含关系成立。

(b) 设 A 为 X 中的正则闭集, 由引理 2.1 知 A 为闭的半开集, 由 (a) 知 $A \cap U$ 为 U 的半开集且 $A \cap U$ 于 U 中是闭的, 再由引理 2.1 知 $A \cap U$ 是 U 中的正则闭集。

(c) 设 A 为 U 中的半开集, 则存在 U 中的开集 V 使: $V \subset A \subset \text{cl}_U V$, 显然 V 是 X 中开集, 且有: $V \subset A \subset \text{cl}_U V \subset \text{cl}V$, 故 A 是 X 中的半开集。

定理 2.1 设 $(X, \mathcal{J})$ 是 Fuzzy 拓扑空间, 分明集 $W \subset X$ 且 W 作为 X 中的 Fuzzy 集是开的. 如果 X 中的子空间 W 是 Fuzzy S-闭的 $\Leftrightarrow W$ 是 X 中的 Fuzzy S-集。

证明 若 W 是 X 中的 Fuzzy S-闭的开子空间, 设 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 为 X 中的正则闭集簇且复盖 W , 则 $\{P_\alpha \cap W: \alpha \in A\}$ 为 W 的正则闭复盖 (引理 2.2b). 由 W 是 Fuzzy S-闭的, 故从 $\{P_\alpha \cap W: \alpha \in A\}$ 中能选出 W 的有限子复盖, 进而从 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 中能选出复盖 W 的有限子簇即 W 是 Fuzzy S-集。

反之, 设 W 是 Fuzzy S-集, 设 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 是子空间 W 中的任一正则闭复盖, $\forall \alpha \in A$, 显然 $P_\alpha = \text{cl}_W \text{Int}_W(P_\alpha) \subset \text{cl}_X \text{Int}_W(P_\alpha) = \text{cl}_X \text{Int}_X(P_\alpha) \triangleq \bar{P}_\alpha^0$ (由于 W 是开的, 故 $\text{Int}_W(P_\alpha) = \text{Int}_X(P_\alpha)$), 故 $\{\bar{P}_\alpha^0: \alpha \in A\}$ 是 X 中的 Fuzzy 正则闭集簇且复盖 W , 由 W 是 Fuzzy S-集, 从 $\{\bar{P}_\alpha^0: \alpha \in A\}$ 中能选出复盖 W 的有限子簇, 不妨设为 $\bar{P}_1^0, \bar{P}_2^0, \dots, \bar{P}_n^0$, 使 $\bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i^0 \supset W$. 由于

$$\begin{aligned} [\bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i^0] \cap W &= [\bigcup_{i=1}^n \text{cl}_X \text{Int}_X(p_i)] \cap W \\ &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_W \text{Int}_X(p_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl}_W \text{Int}_W(p_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^n p_i \end{aligned}$$

由 $[\bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i^0] \cap W \supset W$, 知 $\bigcup_{i=1}^n \bar{P}_i^0 \supset W$

故从 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 中能选出 W 的有限子复盖即 W 是 S -闭子空间。

引理2.3 设 A 是 (X, J) 中的 Fuzzy S -集, 若 $A \subset B \subset \text{cl}A$, 则 B 亦是 X 中的 Fuzzy S -集

证明 设 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 是 X 中复盖 B 的任一正则闭集簇, 由 $A \subset B \subset \text{cl}A$ 知, $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 复盖 A . 由 A 是 S -集知从 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 中能选出有限子簇, 不妨设为 $P_1, P_2, \dots, P_n$, 使 $\bigcup_{i=1}^n P_i \supset A$, 故, $\bigcup_{i=1}^n P_i = \text{cl}(\bigcup_{i=1}^n P_i) \supset \text{cl}A \supset B$, 即 B 亦是 X 中的 Fuzzy S -集。

定理2.2 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, 每一 X_i 是分明集且 $\bigcup_{i=1}^n X_i = X$, 且每一 X_i 作为 X 中的 Fuzzy 集是开的, 则有:

如果 X_i 作为 X 的子空间是 Fuzzy S -闭的, 则 (X, J) 亦是 Fuzzy S -闭的。

证明 设 $P = \{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 是 X 中的正则闭复盖, $\forall i, P$ 亦是 X_i 的复盖, 由 X_i 是 Fuzzy S -闭的知 X_i 是 Fuzzy S -集 (定理2.1), 故从 P 中能选出复盖 X_i 的有限子簇 P_i . 令 $P_0 = \bigcup_{i=1}^n P_i$, 则 P_0 是从 P 中选出的 X 的复盖, 故 X 是 Fuzzy S -闭空间。

推论2.1 S -闭空间的有限和是 S -闭空间

定理2.3 若 (X, J) 中的每一个 Fuzzy 开子集是 Fuzzy S -集, 则 X 的每个 Fuzzy 子集都是 Fuzzy S -集。

证明 若 (X, J) 中的每个开子集都是 Fuzzy S -集, 由引理2.3知 X 的每个半开集仍是 Fuzzy S -集. 设 A 为 X 中的任一 Fuzzy 子集, $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 为复盖 A 的 X 中的任一正则闭集簇. 由每个 P_α 是闭的半开集 (引理2.1) 及半开集之并仍是半开集知, $\bigcup \{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 为 X 中半开集. 故 $\bigcup \{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 为 X 中的 Fuzzy S -集, 而 $\{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 为复盖 $\bigcup \{P_\alpha: \alpha \in A\}$ 的一簇正则闭集. 故从中能选出有限子复盖, 这个子复盖显然复盖 A , 即 A 是 Fuzzy S -集。

3 Fuzzy S -闭包

定义3.1 设若 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, A 是 X 中 Fuzzy 集, 令 $\text{cl}_s A = \bigcap \{Q: Q \supset A \text{ 且 } Q \text{ 是正则开的}\}$, 则称 $\text{cl}_s A$ 为 A 的 Fuzzy S -闭包, 有时简称 S -闭包。

显然 $\text{cl}_s A \supset A$ 且 $A \supset B \Rightarrow \text{cl}_s A \supset \text{cl}_s B$

定理3.1 Fuzzy 点 $e \in \text{cl}_s A \Leftrightarrow$ 对 e 的任一正则闭重域 P , P 与 A 相重。

证明 设 e 为 x_i . $e \in \text{cl}_s A \Leftrightarrow$ 对任意含 A 的 Fuzzy 正则开集 Q , 都有 $e \in Q \Leftrightarrow$ 对任意含于 A' 的 Fuzzy 正则闭集 $P = Q'$, 有 $P(x) < 1 - \lambda \Leftrightarrow$ 凡满足 $P(x) > 1 - \lambda$ 的 Fuzzy 正则闭集 P , 都有 P 不含在 A' 内 $\Leftrightarrow$ 凡满足 $P(x) > 1 - \lambda$ 的 Fuzzy 正则闭集 P , 都有 P 与 $(A')' = A$ 相重。

引理3.1 设 A 是 (X, J) 中的任一 Fuzzy 集, $A = \text{cl}_s A \Leftrightarrow A$ 是一簇正则开集之交。

证明 “ $\Rightarrow$ ” 显然的, 反之若 A 是一簇正则开集之交, 显然这些正则开集包含 A . 而 $\text{cl}_s A$ 为所有包含 A 的正则开集之交, 故 $A \supset \text{cl}_s A \supset A$ 即 $A = \text{cl}_s A$ 。

定理3.2 设 (X, J) 是 Fuzzy S -闭空间, 则 X 中具有不相交 S -闭包的两个集分别包含在不相交的正则开集中。

证明 用反证法, 若存在 X 中两个 Fuzzy 集 A, B 且 $\text{cl}_s A \cap \text{cl}_s B = \emptyset$, 但包含 A 的每个正则开集与包含 B 的每个正则开集相交. 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 分别为包含 A, B 的正则开集的全体, 由于正则开交的有限交仍是正则开集, 知 $\{W_i \cap V_i: W_i \in \mathcal{A}, V_i \in \mathcal{B}\}$ 应为 X 的中心正则的开集簇. (因为 $\bigcap_{i=1}^n \{W_i \cap V_i\} = [\bigcap_{i=1}^n W_i] \cap [\bigcap_{i=1}^n V_i]$, 而 $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{B}$, 故 $\bigcap_{i=1}^n W_i \cap V_i \neq \emptyset$) 由 X

是 Fuzzy S-闭的知:

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \bigcap \{W \cap V; W \in A, V \in B\} = \bigcap \{W; W \in A\} \cap \bigcap \{V; V \in B\} \\ &= cl_s A \cap cl_s B \quad (\text{命题1.5}) \end{aligned}$$

与 $cl_s A \cap cl_s B = \emptyset$ 矛盾! 定理得证。

引理3.2 (X, J) 是 Fuzzy 极不连通的 $\Leftrightarrow$ 对 X 中的任意 Fuzzy 集 A 有 $cl_s A \supset cl A$ 。

证明 若 X 是极不连通, 则任意正则开集是闭的(命题1.4), 而 $cl_s A$ 为包含 A 的一切正则开集之交, 故 $cl_s A$ 是闭的, 有 $cl_s A = cl[cl_s A] \supset cl A$ 。

反之, 若 X 是非极不连通的, 则存在一个 Fuzzy 正则开集 A , 使 A 非闭, 由引理3.1知 $cl_s A = A \subset cl A$, 与 $cl_s A \supset cl A$ 矛盾!

引理3.3 如果 (X, J) 是 Fuzzy 正则的 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任意 Fuzzy 集 A 有: $cl_s A \subset cl A$ 。

证明 若 X 是正则的, A 是 X 中任一 Fuzzy 集, 则 $cl A$ 是一簇正则开集之交(定义1.6), 故 $cl_s cl A = cl A$, 即有 $cl_s A \subset cl_s cl A = cl A$ 。

反之, 如果 X 是非正则的, 则存在一 Fuzzy 闭集 A , 使 A 不是一簇正则开集之交, 由引理3.1知 $cl_s A \neq A$, 故 $cl_s A \supsetneq A = cl A$ 。

推论3.1 若 X 是 Fuzzy 正则且又是 Fuzzy 极不连通的空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任意 Fuzzy 集 A , 有 $cl_s A = cl A$ 。

4 Fuzzy S-内核

定义4.1 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, A 是 X 中的 Fuzzy 集。令 $Int_s A = \bigcup \{P; P \subset A \text{ 且 } P \text{ 是正则闭}\}$, 称 $Int_s A$ 为 A 的 Fuzzy S-内核。

显然: $Int_s A \subset A$ 且 $A \subset B \Rightarrow Int_s A \subset Int_s B$ 。

引理4.1 设 B 是 (X, J) 的 Fuzzy 集, 若 $B = Int_s B \Leftrightarrow B$ 是 X 中一簇正则闭集之并。

证明 “ $\Rightarrow$ ” 显然。若 B 为 X 中一簇正则闭集之并, 则这些正则闭集含于 B 内, 而 $Int_s B$ 为所有含于 B 内的正则闭集之并, 故 $Int_s B \supset B \supset Int_s B$ 即 $B = Int_s B$ 。

定理4.1 A 为 (X, J) 中的 Fuzzy 集, $A = Int_s A \Leftrightarrow A' = cl_s(A')$ 。

证明 $A = Int_s A \Leftrightarrow A$ 为 X 中一簇正则闭集之并(引理4.1) $\Leftrightarrow A'$ 为 X 中一簇正则开集之交 $\Leftrightarrow A' = cl_s A'$ (引理3.1)

引理4.2 (X, J) 是 Fuzzy 极不连通的 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任一 Fuzzy 集 B , 有 $Int_s B \subset B^\circ$ [B° 为 B 于 X 的内核]。

证明 设 X 是极不连通的, 则正则闭集是开的, 而 $Int_s B$ 是含于 B 中的一切正则闭集之并, 故 $Int_s B$ 是开的, 从而 $Int_s B \subset B^\circ$ 。

反之, 若 X 是非极不连通的, 则存在正则闭集 B , 使 B 非开, 即 $B \not\subset B^\circ$, 而由引理4.1知 $B = Int_s B \not\subset B^\circ$ 。

引理4.3 (X, J) 是 Fuzzy 正则空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 中的任意 Fuzzy 集 B , 有 $Int_s B \supset B^\circ$ 。

证明 若 X 是 Fuzzy 正则的, 则 B° 为一簇正则闭集之并, 由引理4.1知 $B^\circ = Int_s B^\circ \subset Int_s B$ 。

反之, 若 X 是非正则的, 则存在开集 B , 使 B 不是一簇正则闭集之并, 引理4.1知 $B \supsetneq Int_s B$, 即 $B^\circ \supsetneq Int_s B$ 。

推论4.1 (X, J) 是 Fuzzy 极不连通的且又是 Fuzzy 正则的 $\Leftrightarrow$ 对 X 中任意 Fuzzy 集 B , 都有: $\text{Int}_J B = B^\circ$.

5 Fuzzy S-连续映射

定义5.1^[4] 设 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 中的 Fuzzy 映射. 如果对 Y 中的任一正则闭集 P , 都有 $f^{-1}[P]$ 是 X 中的一簇正则闭集之并, 则称 f 是 Fuzzy S-连续的. 有时简称 S-连续.

一个等价提法: “对 Y 中的任一正则开集 Q , $f^{-1}[Q]$ 是 X 中的一簇正则开集之交”.

定义5.2 设 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 的 Fuzzy 映射, 如果对 X 中的任意 Fuzzy 集 A , 都有 $\text{cl}_J f(A) \subset f(\text{cl}_J A)$, 则称 f 是 Fuzzy S-闭映射, 有时简称 S-闭映射.

定理5.1 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 的 Fuzzy S-闭映射 $\Leftrightarrow f$ 将 X 中一簇正则开集之交映成 Y 中一簇正则开集之交.

证明 设 A 是 X 中一簇正则开集之交. 由引理3.1知, $A = \text{cl}_J A$.

$$f(A) = f(\text{cl}_J A) \supset \text{cl}_J f(A) \quad [f \text{ 是 S-闭的}]$$

$$\supset f(A)$$

故 $\text{cl}_J f(A) = f(A)$, 又由引理3.1知 $f(A)$ 是 Y 中一簇正则开集之交.

反之, 设 A 是 X 中任意 Fuzzy 集, 则由引理3.1知 $\text{cl}_J A$ 为 X 中一簇正则开集之交, 由条件知 $f(\text{cl}_J A)$ 亦为 Y 中一簇正则开集之交, 因而 $\text{cl}_J f(\text{cl}_J A) = f(\text{cl}_J A)$, 而 $\text{cl}_J f(\text{cl}_J A) \supset \text{cl}_J f(A)$ 即 $f(\text{cl}_J A) \supset \text{cl}_J f(A)$, 故 f 是 S-闭的.

定理5.2 从 Fuzzy 正则空间到 Fuzzy 极不连通空间的 Fuzzy S-闭映射是闭映射; 从 Fuzzy 极不连通空间到 Fuzzy 正则空间的 Fuzzy 闭映射是 Fuzzy S-闭映射.

证明 设 A 是 X 中的任意 Fuzzy 闭集, f 是正则空间 X 到极不连通空间 Y 的 Fuzzy S-闭映射, 由 X 是正则知 A 是一簇正则开集之交, 从而 $A = \text{cl}_J A$ (引理3.1). 有:

$$f(A) = f(\text{cl}_J A) \supset \text{cl}_J f(A) \quad [f \text{ 是 S-闭的}]$$

$$\supset \text{cl}_J f(A) \quad [Y \text{ 是极不连通的及引理3.2)]$$

故 f 是闭映射.

若设 f 是极不连通空间 X 到正则空间 Y 的闭映射, 设 B 是 X 中的 Fuzzy 集. 由 X 是极不连通的, 故有 $\text{cl}_J B \supset \text{cl}_J B$, 从而 $f(\text{cl}_J B) \supset f(\text{cl}_J B)$. 而 $f(\text{cl}_J B)$ 为 Y 中闭集, 由 Y 是正则的知 $f(\text{cl}_J B)$ 为一簇正则开集之交. 由引理3.1知 $\text{cl}_J [f(\text{cl}_J B)] = f(\text{cl}_J B)$, 故有

$$f(\text{cl}_J B) \supset f(\text{cl}_J B) = \text{cl}_J [f(\text{cl}_J B)] \supset \text{cl}_J f(B)$$

即 f 是 S-闭的.

定义5.3 设 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 的 Fuzzy 映射, 如果对 X 中任一 Fuzzy 集 B , 都有: $f(\text{Int}_J B) \subset \text{Int}_J f(B)$, 则称 f 为 Fuzzy S-开映射, 简称 S-开映射.

定理5.3 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 的 Fuzzy S-开映射 $\Leftrightarrow f$ 将 X 中一簇正则闭集之并映成 Y 中的一簇正则闭集之并.

证明 设 B 是 X 中一簇正则闭集之并. 由引理4.1知 $B = \text{Int}_J B$. 由 f 是 S-开的得: $\text{Int}_J f(B) \supset f(\text{Int}_J B) = f(B)$, 而 $\text{Int}_J f(B) \subset f(B)$, 故 $\text{Int}_J f(B) = f(B)$. 因而 $f(B)$ 仍是 Y 中一簇正则闭集之并.

反之, 对任一 X 中 Fuzzy 集 B , $\text{Int}_s B$ 是一簇正则闭集之并, 而 $f(\text{Int}_s B)$ 是 Y 中一簇正则闭集之并, 即有 $f(\text{Int}_s B) = \text{Int}_s f(\text{Int}_s B) \subset \text{Int}_s f(B)$. 故 f 是 S -开映射.

定理 5.4 Fuzzy 正则空间到 Fuzzy 极不连通空间的 Fuzzy S -开映射是 Fuzzy 开的; 从 Fuzzy 极不连通空间到 Fuzzy 正则空间的开映射是 Fuzzy S -开映射.

证明 设 f 是正则空间 X 到极不连通空间 Y 的 Fuzzy S -开映射, 设 B 是 X 中任一开集. 有:

$$\begin{aligned} f(B) &\subset f(\text{Int}_s B) && [\text{由 } X \text{ 正则及引理 4.3}] \\ &\subset \text{Int}_s f(B) && [f \text{ 是 } S\text{-开}] \\ &\subset [f(B)]^\circ && [\text{由 } Y \text{ 是极不连通及引理 4.2}] \end{aligned}$$

从而 f 是开的.

若设 f 是极不连通空间 X 到正则空间 Y 的开映射, 对 X 中任一 Fuzzy 集 B , 有 $f(B^\circ)$ 为 Y 中的开集, 而 Y 是正则的, 故 $f(B^\circ)$ 为 Y 中一簇正则闭集之并. 由引理 4.1 知 $f(B^\circ) = \text{Int}_s f(B^\circ)$, 而由于 X 是极不连通的, 由引理 4.2 知 $\text{Int}_s B \subset B^\circ$, 故有:

$$f(\text{Int}_s B) \subset f(B^\circ) = \text{Int}_s f(B^\circ) \subset \text{Int}_s f(B), \text{ 从而 } f \text{ 是 Fuzzy } S\text{-开映射.}$$

定理 5.5 设 f 是 (X, J) 到 (Y, U) 的 Fuzzy 映射, 则下面命题等价

- (a) f 是 Fuzzy S -连续的
- (b) 若 Q 是 Y 中一簇 Fuzzy 正则开集之交, 则 $f^{-1}(Q)$ 是 X 中一簇正则开集之交.
- (c) 如果 H 是 Y 中一簇 Fuzzy 正则闭集之并, 则 $f^{-1}(H)$ 是 X 中一簇正则闭集之并.
- (d) 对 Y 中任一 Fuzzy 集 B , 有 $f^{-1}(\text{Int}_s B) \subset \text{Int}_s f^{-1}(B)$.
- (e) 对 Y 中任一 Fuzzy 集 B , 有 $f^{-1}(\text{cl}_s B) \supset \text{cl}_s f^{-1}(B)$.
- (f) 对 X 中任一 Fuzzy 集 A , 有 $f(\text{cl}_s A) \subset \text{cl}_s f(A)$

证明 按 $c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow f \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow c$ 的循环线分段证明.

(c) $\rightarrow$ (b) 设 Q 是 Y 中一簇 Fuzzy 正则开集之交, 则 Q' 是 Y 中一簇正则闭集之并, 由 (c), $f^{-1}(Q') = [f^{-1}(Q)]'$ 为 X 中一簇正则闭集之并, 推出 $f^{-1}(Q)$ 为 X 中一簇正则开集之交.

(b) $\rightarrow$ (a) 显然的

(a) $\rightarrow$ (f) 设 A 是 X 中任一 Fuzzy 集, $\text{cl}_s f(A)$ 是 Y 中一簇正则开集之交. 不妨令 $\text{cl}_s f(A) = \bigcap \{Q_\alpha : \alpha \in D\}$, 其中 $Q_\alpha \supset f(A)$, 由 (a) 知 $f^{-1}(Q_\alpha)$ 是 X 中一簇正则开集之交, 由引理 3.1 知, $\text{cl}_s f^{-1}(Q_\alpha) = f^{-1}(Q_\alpha)$, $\forall \alpha \in D$. 从而有:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\text{cl}_s f(A)] &= f^{-1}[\bigcap \{Q_\alpha : \alpha \in D\}] \\ &= \bigcap \{f^{-1}(Q_\alpha) : \alpha \in D\} \\ &= \bigcap \{\text{cl}_s f^{-1}(Q_\alpha) : \alpha \in D\} \\ &\supset \bigcap \{\text{cl}_s f^{-1}f(A) : \alpha \in D\} && [Q_\alpha \supset f(A)] \\ &\supset \text{cl}_s A && [f^{-1}f(A) \supset A] \end{aligned}$$

而 $\text{cl}_s f(A) \supset f[f^{-1}(\text{cl}_s f(A))] \supset f(\text{cl}_s A)$

(f) $\rightarrow$ (e) 设 B 是 Y 中任一 Fuzzy 集, 则 $f^{-1}(B)$ 为 X 中 Fuzzy 集, 依 (f) 可得 $f[\text{cl}_s f^{-1}(B)] \subset \text{cl}_s f f^{-1}(B) \subset \text{cl}_s B$, 故 $f^{-1}(\text{cl}_s B) \supset f^{-1} \cdot f[\text{cl}_s f^{-1}(B)] \supset \text{cl}_s f^{-1}(B)$

(e) $\rightarrow$ (d) 设 B 是 Y 中任一 Fuzzy 集. 由于 $\text{Int}_s B = (\text{cl}_s B')'$ [事实上: $\text{Int}_s B$ 为含于 B 中的所有正则闭集之并, 故 $(\text{Int}_s B)'$ 为包含 B' 的所有正则开集之交, 故 $(\text{Int}_s B)' = \text{cl}_s B'$ 即 $\text{Int}_s B =$

$[cl, B']'$. 因此有:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Int, B) &= f^{-1}[(cl, B')'] \\ &= [f^{-1}[cl, B']]' \\ &\subset [cl, f^{-1}(B')] \quad [\text{由(e)成立}] \\ &= [cl, [f^{-1}(B)]']' \\ &= Int, f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(d) $\rightarrow$ (c) 设 H 为 Y 中一族 Fuzzy 正则闭集之并, 则由引理 4.1 知 $Int, H = H$, 从而有:

$$\begin{aligned} f^{-1}(H) \supset Int, f^{-1}(H) \supset f^{-1}(Int, H) \quad [\text{由(d)成立}] \\ = f^{-1}(H) \end{aligned}$$

故 $f^{-1}(H) = Int, f^{-1}(H)$. 又由引理 4.1 知 $f^{-1}(H)$ 是 X 中一族正则闭集之并.

参 考 文 献

- [1] R. F. Dickman, Jr. and R. L. Krysicki, S-set and S-perfect mappings, proc. Amer. math. soc. 1980; 80: 687-692
- [2] 陈清煊. 关于 S-闭空间, 近似紧集和 S-内核. 江西师大学报, 1986; 1: 4-12
- [3] K. K. AZAD. on Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost continuity and Fuzzy Weakly continuity. J. Math. Anal, Appl 1982; 82: 14-32
- [4] 汪火云. Fuzzy S-闭空间, 华东交大学报, 1992; 4
- [5] B. Hutton, I. Reilly. Separation Axioms in Fuzzy Topological spaces, Fuzzy set and systems. 1980; 3: 93-104
- [6] 恽自求, 关于 S-集与 S-闭包, 苏州大学学报, 1982; 1: 28-37

Fuzzy S-set, Fuzzy S-closure and Fuzzy S-interior

Wang Huoyun

ABSTRACT

In this paper, the concept of fuzzy S-set, fuzzy S-closure and fuzzy S-interior are introduced in fuzzy topological spaces. The fuzzy S-closed spaces and the fuzzy S-continuous mapping are researched with them

Key words: Fuzzy S-set; Fuzzy S-closure; Fuzzy S-interior; Fuzzy S-closed Spaces;
Fuzzy S-continuous Mapping