

度补图的直径

徐保根

(基础课部)

摘 要

本文的第一部分对度补图的直径作研究,得出其直径 $D(G) \leq 4$,并构造出一个直径为4的度补图来说明这一结果不能再改进。第二部分通过对图与其补图的直径分析,从而指明了若 $D(G) = 3$,则 $D(\bar{G}) = 2$ 或3。作者对满足 $D(G) = 3$,且 $D(\bar{G}) = 3$ 的这一类图作了更进一步的分析,得出了其结构性质、构造方法及其全部极图。

关键词:度补图;自补图;度序列;极图;直径

1 度补图的直径分析

本文所指的图均为无向单图。如果一个图与其补图有相同的度序列,则称之为度补图。

引理1 度补图均为连通图。

证:设 G 是一个度补图,若 G 不连通,则 G 有两个或两个以上的分支。记 Δ 表示图 G 的最大度,从而具有最大度的点所在的分支中至少有 $\Delta + 1$ 个点。在另外一个分支中任取一点 v ,则 v 点在 G 的补图 $\bar{G}$ 中与上述 $\Delta + 1$ 个点均邻接,即 $\bar{G}$ 中存在度数不小于 $\Delta + 1$ 的点。这与 G 是度补图矛盾。故引理1得证。

引理2 若 G 是度补图, v 是 G 中任意一个具有最大度的点。则:对 G 中任意一点 u ,有 u 与 v 的距离 $d(u, v) \leq 2$ 。

证:若引理2不真,则在 G 中存在一点 u ,使得 $d_G(u, v) \geq 3$ 。于是,在 G 中, v 点的闭邻域中的 $\Delta + 1$ 个点均与 u 点不邻接。如图(1)所示。

从而在 $\bar{G}$ 中, v 点闭邻域中每一点均与 u 点邻接,即 u 点在 $\bar{G}$ 中的度数 $d_{\bar{G}}(u) \geq \Delta + 1$,而 Δ 是 G 的最大度,

这与 G 是度补图矛盾。故引理2得证。

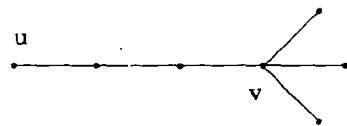


图 1

定理1 度补图 G 的直径 $D(\bar{G}) \leq 4$ 。

证:由引理1, G 是连通图。任取 G 中两个点 u 和 v ,若 u 或 v 是具有最大度数的点,则由引理2得知: $d_G(u, v) \leq 2$,若 u 和 v 都不是具有最大度数的点,则存在 G 中具有最大度

本文于1992年7月10日收到

数的点 w , 由引理 2: $d_G(u, w) \leq 2$, $d_G(w, v) \leq 2$, 再根据距离三角不等式有:

$$d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v) \leq 4$$

由 u 和 v 的任意性, 得知图 G 的直径: $D(G) \leq 4$. 证毕.

类似于引理 2 的证明, 不难得出定理 1 的一个推广, 即为下面的定理 I.

定理 I 若 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图 G 的最大度和最小度数, 且 $\Delta(G) + \delta(G) \geq p-1$, 则图 G 的直径 $D(G) \leq 4$. 其中 p 为 G 的阶.

林格尔 [R11] 和萨克斯 [S8]^[1] 中指出: “每个非平凡的自补图的直径为 2 或 3”. 作为自补图的一种推广, 度补图的直径有可能等于 4. 从而说明了定理 I 中不等式不能再改进.

定理 II 存在直径为 4 的度补图.

证: 如图 (2) 所示: 8 阶图 G 与其补图 $\bar{G}$ 的度序列均为 $d = (5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2)$, G 是度补图, 且 $d_G(u, v) = 4$, $D(G) = 4$.

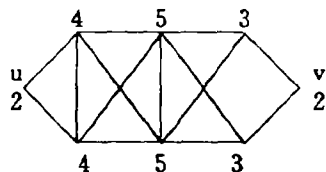


图 2

2 $D(G) = D(\bar{G}) = 3$ 的图的结构

不难证明下面命题

命题: 若图 G 的直径 $D(G) \geq 4$, 则其补图 $\bar{G}$ 的直径 $D(\bar{G}) \leq 2$.

由上述命题, 容易得出如下两个推论.

推论 1 每个非平凡的自补图直径为 2 或者 3.

推论 2 若 $D(\bar{G}) = 3$, 则 $D(G) = 2$ 或 3.

由推论 2 可将所有直径为 3 的 P 阶图分成两类, 在此我们只要分析其中一类的结构, 而另一类便不难得出.

定理 N $D(G) = D(\bar{G}) = 3$, 当且仅当 G 是由一条长为 3 的链 $u-u_1-v_1-v$ 和另外一个图 G_1 构成, 且使 G_1 中每个顶点至少与 u_1 和 v_1 之一邻接, 至多与 u 和 v 之一邻接.

本定理指明了 $D(G) = D(\bar{G}) = 3$ 的这类图结构及其构造方法. 由这一定理及其后面的证明, 不难得出以下若干推论.

推论 4 (1) 若 P 阶图 G 满足: $D(G) = D(\bar{G}) = 3$, 则

(1) G 至少有两个相邻的中心点.

(2) G 有直径为 3 的生成树 $T = K_{1,s} \cup K_{1,t} + c_1 c_2$. 其中 $s+t = p-2$, c_1, c_2 分别为 $K_{1,s}$ 和 $K_{1,t}$ 的中心点.

(3) G 边数 $|X(G)| \leq \binom{p-1}{2}$.

推论 4 (2) 在推论 4 (1) 的条件下, 若 $|X(G)| = \binom{p-1}{2}$, 则:

(1) 其极图数目为 $S = \left\lceil \frac{p-2}{2} \right\rceil$ 个.

(2) 每个极图由 K_{p-2} 中某 S_1 个点邻接 u 点, 其余 $p-2-S_1$ 个点邻接 v 而产生, 其中 $1 \leq S_1 \leq \frac{p-2}{2}$, u 和 v 是 K_{p-2} 之外的不邻的两点.

对于 $D(G) = D(\bar{G}) = 3$ 的这类图, 推论 4 (1) 分析了其结构性质, 推论 4 (2) 找出了其全部极图。

现在我们来证明定理 N。

充分性: 由 G 的构造方法, 不难验证: $D(G) = 3$, 由推论 2 知: $D(\bar{G}) = 2$ 或 3, 但由于 $d_G(u_1, v_1) = 3$, 从而得出 $D(G) = D(\bar{G}) = 3$ 。

必要性: 若 $D(G) = D(\bar{G}) = 3$, 由 G 与 $\bar{G}$ 均为连通图, 从而存在 $u, v \in V(G)$, 使得 $d_G(u, v) = 3$, u 和 v 在 G 中不相邻。

令: $A = N_G(u)$ $B = N_G(v)$ $C = V(G) - A - B$, 其中 C 可以是空集。则 A, B, C 构成 $V(G)$ 的一个划分, 且在 G 中, A 中的点与 v 不相邻, B 中的点与 u 不相邻。如图 (3) 所示。

若 $C = \varnothing$, 则定理显然成立。若 $C \neq \varnothing$, 则 C 中的点与 u 和 v 均不相邻。又由 $D(\bar{G}) = 3$ 知, 存在 $u', v' \in V(G)$, 使得 $d_G(u', v') = 3$, 且 u' 和 v' 在 G 中相邻。

若 u' 和 v' 同属于 A (或 B 或 C), 则在 $\bar{G}$ 中, u', v' 均与 v (或 u) 相邻, 从而 $d_G(u', v') \geq 2$ 矛盾。

若 u' 和 v' 其一属于 A (或 B), 另一属于 $C \neq \varnothing$, 则在 $\bar{G}$ 中, u' 和 v' 与 v (或 u) 均相邻, 从而 $d_G(u', v') \leq 2$ 矛盾。

因此, u' 和 v' 必定其一在 A 中, 另一在 B 中。不妨设: $u' \in A, v' \in B$ 。又因为 u' 和 v' 在 G 中相邻, 则 $u' \neq u, v' \neq v$ 。于是 $u - u' - v' - v$ 是 G 中一条长为 3 的链。故可设 $u' = u, v' = v$ 。

令: $G_1 = G - \{u, u_1, v_1, v\}$,

若 G_1 中存在某点 x , 在 G 中与 u_1 和 v_1 均不相邻, 则 x 点在 $\bar{G}$ 中与 u_1 和 v_1 均相邻, 从而有: $d_G(u_1, v_1) = 2$ 矛盾。因此, G_1 中任何一点至少与 u_1 和 v_1 之一邻接。显然还有: G_1 中任何一点不能同时与 u 和 v 相邻。事实上, 这就证明了定理的必要性。证毕。

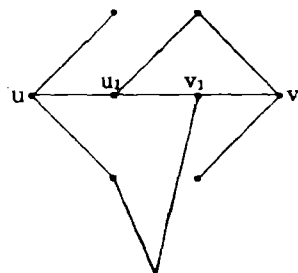


图 3

参 考 文 献

- [1] Sachs, H. Uber selbslkomplementare Graphen • publ • Math • Debrecen g • 1962 • 270~288
- [2] F·哈拉里. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980: 27~30
- [3] 李修睦. 图论导引. 武汉: 华中工学院出版社, 1982

The Diameter of Degree—Complementary Graph

Xu Baogen

ABSTRACT

The first part of this paper makes a research to the diameter of degree—complementary graph, results in its diameter $D(G) \leq 4$, and design the degree—complementary graph (of the $D=4$) to show that this result can't be improved further.

The second part shows that if $D(G)$ is 3, $D(\bar{G})$ is 2 or 3 by analyzing the graph and its complement. The author analyzes more further such the graph that is suitable to $D(G) = D(\bar{G}) = 3$, and gains its construction, designing method, and the whole extremal graph.

Key words: degree—complementary graph; self—complement; degree sequence; extremal graph; diameter