

图的色等价与色唯一

刘 二 根

(基础课部)

摘 要

本文综述了近年来国内外有关图的色等价与色唯一性的研究情况, 还介绍了一些待解决的问题。

关键词: 色多项式; 色等价; 色唯一

1 引 言

从1921年 G. D. Binkhoff 为冲击四色猜想而引进色多项式至今, 仍没有一般的方法求图的色多项式的具体形式, 但人们在研究色多项式时发现有些色多项式不只是一个图的色多项式, 因而人们为了解决这个问题又引进了两个概念即图的色等价与色唯一。

本文讨论的图均为有限、无向的简单图。记 $P(G, \lambda)$ 为一个图的色多项式。

定义 1.1 若两个图 G 和 H 有相同的色多项式, 即 $P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$, 则称 G 和 H 为色等价, 简记为 $G \sim H$ 。

定义 1.2 若从 $P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$ 可以推出 G 与 H 同构, 则称 G 为色唯一。

2 图的色等价

关于图的色等价的最早结果是由 Read 得到的, 他证明了:

定理 2.1 一个 n 阶图 G 为树的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$ 。

在此之后定义了 q -树图, 1985 年 Whitehead 得到 2-树的色性。

定理 2.2 一个 n 阶图 G 为 2-树的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^{n-2}$ 。

并且 Whitehead 根据树与 2-树的特征提出了一个关于 q -树的猜想。

猜想 2.1 一个 n 阶图 G 是 q -树的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-q+1)(\lambda-q)^{n-q}$, 其中 $q \geq 3$ 。

1986 年, 韩伯棠和 C. Y. Chao 等分别独立证明了上述猜想成立。

定理 2.3^[1] 一个 n 阶图 G 为 q -树的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-$

本文于 1992 年 5 月 22 日收到

$q+1)(\lambda-q)^{n-q}$, 其中 $q \geq 3$.

1987年, 韩伯棠得到关于 q_k -树的色性.

定理 2.4^[2] 一个 n 阶图 G 为 q_k -树的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)(\lambda-k)^2(\lambda-k-1) \cdots (\lambda-q+1)(\lambda-q)^{n-q-1}$, 其中 $1 \leq k \leq q+1$, $n \geq q+1$.

1975年, L. A. Lee 得到两类图的色性.

定理 2.5^[3] 具有 n 个点, e 条边且每个长度的圈的数目相同的所有仙人掌图是色等价.

定理 2.6^[3] 具有 n 个点, e 条边且每个长度的极小圈的数目相同的所有森林状的连通可平面图是色等价.

1984年, E. G. White head Jr. 得到一系列 K_4 同胚图的色性.

定理 2.7^[4] 下列 7 对 K_4 同胚图对每个正整数 i 与 j 是色等价.

- (1) $K_4(i, 1, j+2, j, 1, 2)$ 与 $K_4(i, 3, j, 1, 1, j+1)$,
- (2) $K_4(i, 1, 2, j, 4, j+2)$ 与 $K_4(i, 1, j+3, j, 2, 3)$,
- (3) $K_4(i, 1, 3, j, 5, j+3)$ 与 $K_4(i, 1, j+4, j, 3, 4)$,
- (4) $K_4(i, i+2, 1, 1, 2, 2)$ 与 $K_4(i, i+1, 2, 3, 1, 1)$,
- (5) $K_4(i, i+3, 2, 1, i+1, 1)$ 与 $K_4(i, i+2, 2, 1, 1, i+2)$,
- (6) $K_4(i, i+3, 1, 2, 2, 3)$ 与 $K_4(i, i+2, 2, 4, 1, 2)$,
- (7) $K_4(i, i+1, 3, 2, 4, 1)$ 与 $K_4(i, i+2, 2, 1, 3, 3)$.

1986年, 韩伯棠得到:

定理 2.8^[5] $K_{m+5}(1, m)$ 的不同构的色等价图只能是 H_{m+5} ; $K_{m+4}(1, m)$ 的不同构的色等价图只能是 H_{m+4}^1 ; H_{m+4}^2 ; H_{m+4}^3 ; H_{m+4}^4 .

1988年, Paul Vaderlind 得到:

定理 2.9^[6] $G \in \Phi_2$ 且 G 具有参数 $(n_1, \dots, n_k)$ 的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{k-r-1}(\lambda-2)^r$ 其中 r 为 $n_1, \dots, n_k$ 中等于 2 的数目.

并且当时他提出一个猜想:

猜想 2.2^[6] 对每个 $n \geq 1$, $G \in \Phi_2$ 且 G 具有参数 $(n_1, \dots, n_k)$ 的充分必要条件是 $P(G, \lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - n_i)$, 其中 $k \geq 1$, $n_1 = 0$ 且 $0 \leq n_i \leq \max(n_1, \dots, n_{k-1}) + 1$ 对 $i = 2, \dots, k$.

1990年, 王朝瑞与兰秀清证明了:

定理 2.10^[7] 若 G 无纯四边形, 则 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^m(\lambda-3)$ ($m \geq 1$) 的充分必要条件是 $G = K_4 \underbrace{(K_2 K_3 (K_2 K_3 (K_2 \cdots (K_2 K_3)) \cdots (K_2 K_3)) \cdots (K_2 K_3))}_{(m-1) \text{ 个}}$.

1990年, 兰秀清得到下面两类图的色性:

定理 2.11 $n+3$ 阶图 $G = K_{n+3} \underbrace{(K_n K_{k+1} (K_n K_{k+1} \cdots (K_n K_{k+1})) \cdots (K_n K_{k+1}))}_{(m-1) \text{ 个}}$ 的充分必要条件是 G 中无纯四边形且 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)(\lambda-k)^2(\lambda-k-1) \cdots (\lambda-n)$, 其中 $1 \leq k \leq n$.

定理 2.12 含有 K_{n+1} 子图的 $n+4$ 阶图 G , $G = K_{n+1} \underbrace{(K_n K_{k+1} (K_n K_{k+1} \cdots (K_n K_{k+1})) \cdots (K_n K_{k+1}))}_{(m-1) \text{ 个}}$ 的充分必要条件是 G 中无纯四边形且 $P(G, \lambda) = \lambda \cdot (\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)(\lambda-k)^2(\lambda-k-1) \cdots (\lambda-n)$, 其中 $1 \leq k \leq n$.

1991 年, 刘二根推广了上面的结论:

定理 2.13 含有 K_{n+1} 子图的 $n+5$ 阶图 G , $G = K_{n+1} \textcircled{K_R} K_{k+1} \textcircled{K_R} K_{k+1} \textcircled{K_R} K_{k+1} \textcircled{K_R} K_{k+1}$ 的充分必要条件是 G 中无纯 m 边形 ($4 \leq m \leq 6$) 且 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)(\lambda-k)^5(\lambda-k-1) \cdots (\lambda-n)$, 其中 $1 \leq k \leq n$.

3 图的色唯一

关于图的色唯一的最早几个结果:

定理 3.1 完全图 K_n 是色唯一的.

定理 3.2 完全图 K_n 的补图 $\bar{K}_n$ 是色唯一的.

定理 3.3 每个圈 C_n ($n \geq 3$) 是色唯一的.

定理 3.4 每个 θ -图 ($n \geq 3$) 是色唯一的.

1978 年, Loerinc 证明了

定理 3.5^[8] 广义 θ -图是色唯一的.

1979 年, C. Y. Chao 和 E. G. White head Jr. 得到下面两类图的色唯一性:

定理 3.6^[9] 当 $n \geq 5$, X_n 是色唯一的.

定理 3.7^[9] 当 $n \geq 6$, Z_n 是色唯一的.

同年, 他们还证明了:

定理 3.8 当 $n \leq 5$ 时, W_n 是色唯一的, W_7 是色唯一的. W_8, W_9 不是色唯一.

并且, 他们当时提出一个关于轮图色唯一性的猜想.

猜想 3.1 当 $n \geq 4$, W_{n+1} 是色唯一的充分必要条件是 n 为偶数.

1984 年, Shaoju Xu 等人证明了上述猜想的充分性成立.

定理 3.9^[10] 当 $n \geq 4$ 为偶数时, W_{n+1} 是色唯一的.

1984 年, E. G. Whitehead Jr 证明了.

定理 3.10^[4] 如果正整数 i, j, k, l, m, n 中不存在两个以上取不同的值, 则 $K_k(i, j, k, l, m, n)$ 是色唯一的.

1985 年, Giudici 证明了:

定理 3.11^[11] 对每个 $r \geq 3$, 图 $G(r, 3)$ 是色唯一的.

在这之后, Chia (私人通信) 证明了:

定理 3.12 对每个 $r \geq 3$, 图 $G(r, 4)$ 是色唯一的.

1990 年, K. M. KOH 和 B. H. GOH 推广了上面两个结论.

定理 3.13^[12] 对所有 $r, s \geq 3$, 图 $G(r, s)$ 是色唯一的.

1986 年, 韩伯棠得到:

定理 3.14^[5] 设 m, n 是两个非负整数且 $n \geq 2$, $0 \leq m \leq n-2$, 则当 $n \neq m+5$, $n \neq m+6$ 时, $K_n(1, m)$ 是色唯一的.

1986 年, Pablo M. Salzberg 证明了:

定理 3.15^[13] $K_{n,m+k}, K_r \cup K_{n,m+k}$ 对 $k=0, 1, m \geq 3$ 是色唯一的.

定理 3.16^[13] 当 $m \geq 2$, $0 \leq k \leq \max(5, \sqrt{2m})$ 时, $K_{n,m+k}, K_r \cup K_{n,m+k}$ 是色唯一的.

并且他在此基础上提出下面猜想。

猜想 3.2^[13] 完全双图 $K_{m,n}$ ($n \geq m \geq 1$) 是色唯一的。

1988 年, 邵立周证明了此猜想成立。

定理 3.17 完全双图 $K_{m,n}$ ($n \geq m \geq 1$) 是色唯一的。

此外, 他还得到一系列图的色唯一性。

定理 3.18 正则的完全 K 分图 $K_{n,n,\dots,n}$ 是色唯一的。

定理 3.19 完全三分图 $K_{n,n,n+1}$ ($i = \pm 1, \pm 2, \pm 3$) 是色唯一的。

定理 3.20 $K_{n-1,n,n+1}$ 是色唯一的。

定理 3.21 $K_r \cup K_{m,n}, K_r \cup K_{n,\dots,n}, K_r \cup K_{n-1,n,n+1}, K_r \cup K_{n,n,n+i}$ ($i = \pm 1, \pm 2, \pm 3$) 是色唯一的。

1986 年, G. L. Chia 证明了:

定理 3.2^[20] 设 G 是一个含有两个块 H 和 K_2 的图, 则 G 是色唯一的充分必要条件是 H 是色唯一的且点可迁。

1987 年, Nian Zu Li, E. G. White head Jr. Shao Jr Xu 对具有二次 σ -多项式的色唯一图进行了分类。

定理 3.23^[14] 令 G 是一个具有二次 σ -多项式的图, 则 G 是色唯一的充分必要条件是 G 满足下面条件中的一个:

- (1) $\bar{G} = C_5$ 。
- (2) $\bar{G} = T(t, m, n, k)$ 其中 $t \neq 0, m \neq 1$, 以及 $n = k = 0$ 。
- (3) $\bar{G} = U(t, n, n, k)$ 其中 $tk = 0$, 且 $n \neq 0$ 。
- (4) $\bar{G} = U(t, n+1, n, k)$ 其中 $n \neq 0, 0 \leq k \leq 1$ 或者 $0 \leq t \leq 1$, 且 $\bar{G} \neq U(1, 2, 1, k)$ 。
- (5) $\bar{G} = U(t, n+s, n, k)$ 其中 $s \geq n+3, n \neq 0$ 且 $t \leq s$ 或者 $k \leq s$ 。

1988 年, Ronald C. Read 证明了:

定理 2.24^[15] W_{10} 是色唯一的。

1990 年, G. L. Chia 证明了:

定理 2.25^[16] 如果 $n \geq 3$ 为奇数, 则 U_{n+1} 是色唯一的, 其中 U_{n+1} 是从 W_{n+1} 中删除一条辐得到。

1990 年, 懂峰明证明了:

定理 2.26^[17] 对于 $K \geq 1, n \geq 4$ 是偶数, $\theta_{n,k}$ 是色唯一的。

1990 年, C. P. Teo 和 K. M. Koh 得到:

定理 2.27^[18] $K_{m,n} - e$ ($m \geq 3$) 是色唯一的。

1990 年, K. M. Koh and B. H. Goh 得到:

定理 2.28^[12] 令 n 和 r 为整数且满足 $n \geq r+1 \geq 4$, 如果 $G \not\cong I$ 且 $G \not\cong J$, 则在 $\mathcal{P}_n(r)$ 中的每个图 G 是色唯一的。

1991 年懂峰明得到:

定理 2.29^[19] 当 d, e, f 均为奇数或均为大于 2 的偶数时, $\theta_{d,e,f}$ 是色唯一的。

定理 2.30^[19] 设 $2 \leq m_1 \leq m_2, k \geq 0, m_1, m_2$ 均为偶数, 那么 $P(G, \lambda) = P(H_k, m_1,$

$m_2, \lambda)$ 的充分必要条件是 $G \cong H_{k, m_1, m_2}$ 或者 $G \cong H_{k+1, 2, m_1, m_2}$ 。

4 未解决的问题

在猜想 2.2 中, 当 $n=4$ 时 Paul Vaderlind 举出了一个反例说明此猜想不成立, 但 $n=3$ 时至今未得到解决。

问题 4.1 如果一个图的色多项式 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1)^{k-i-j}(\lambda-2)^i(\lambda-3)^j$, 其中 i, j 分别是 $n_1, \dots, n_k$ 中等于 2 和 3 的数目, 则 G 是否可以表示成 $G \in \varphi_3$ 且 G 具有参数 $(n_1, \dots, n_k)$?

问题 4.2 如果含有 K_{n-1} 子图的 $n+m$ 阶图 G 的色多项式 $P(G, \lambda) = \lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k-1) \cdot (\lambda-k)^m (\lambda-k-1) \cdots (\lambda-n)$ 且 G 中无纯 1 边形 ($4 \leq l \leq m+1$) 其中 $m \geq 6, 1 \leq k \leq n$, 那么 G 是否可以表示成 $G = K_{n-1} \underbrace{(K_k)_{k+1} (K_k)_{k-1} \cdots (K_k)_{k-1}}_{(m-1) \text{ 个}}$?

问题 4.3 $K_{m,n} - \{e_1, e_2\}$ (其中 e_1, e_2 是 $K_{m,n}$ 中的两条独立边) 是否是色唯一的?

问题 4.4 $K_{m,n} + e$ 是否是色唯一的? 其中 e 是连接 $K_{m,n}$ 两个部分点集的任一个中的两点。

问题 4.5 当 $n > 9$ 时, 猜想 3.1 中的必要性是否成立? 即当 $n > 9$ 时, 若 W_{n+1} 是色唯一的, 那么是否一定能得到 n 为偶数?

问题 4.6 所有连通点可迁图是否是色唯一的?

参 考 文 献

- [1] 韩伯棠. q -树的色性. 科学通报, 1986; 23
- [2] 韩伯棠. q_k -树的色性. 应用数学学报, 1987; 11 (4): 457—467
- [3] L. A. Lee. On Chromatically Equivalent Graph. Ph. D. Thesis, The George Weorge Wasington university 1975
- [4] E. G. Whitehead Jr.. Chromatic Uniqueness and Equivalent of K_n Homeomorphs. J. of Graph Theory vol. 1984; 8: 355—364
- [5] 韩伯棠. 关于一类图 $K_n(1, m)$ 的色性. 应用数学学报, 1986; 9 (1): 101—112
- [6] Paell Vaderlind. Chromaticity of Triamgulate Graphs. J. of Groaph Theory 1988; 12: 245—248
- [7] 王朝瑞, 兰秀清. 一类图的色性. 北京理工大学学报, 1990; 10 (2): 1—3
- [8] B. Loerinc. Chromatic Uiqueness of the generalize θ -graphs. Disorete Math. 1978; 23: 313—316
- [9] C. Y. Chao and E. G. Whitehead Jr.. Chromatically Unique Graphs. Discrete Math. 1979; 27: 171—177

- [10] S. J. Xu and N. Z. Li. The chromaticity of Wheels. *Discrete Math.* 1984; 51: 207—212
- [11] R. E. Girdici. Some new families of chromatically Unique Graphs. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* (Dekker, New York) 1985; 96: 147—157
- [12] K. M. Koh and B. H. Goh. Two classes of chromatically Unique graphs. *Discrete Math.* 1990; 82: 13—24
- [13] Pablo M Saltberg. On the Chromatic Uniqueness of Bipartite Graphs. *Discrete Math.* 1986; 58: 285—194
- [14] N. Z. Li, E. G. White head Jr., S. J. Xu. Classification of Chromatically Unique Graphs Having Quadratic σ - Polynomials. *J. of Graph Theory*, 1987; 11 (2): 169—176
- [15] Ronald C. Read. A notes on the Chromatic Uniqueness of W_{10} . *Discrete Math.* 1988; 69: 317
- [16] G. L. Chia. The Chromaticity of Wheels with a Missing Spoke. *Discvete Math.* 1990; 82: 209—212
- [17] C. P. Teo and K. M. Koh. The chromaticity of Complete Bipartite Graphs with at most Ond Edge Deleteel. *J. of Graph Theory.* 1990; 14 (1): 89—99
- [18] 懂峰明. 广义轮图的色多项式唯一性. *数学研究与评论*, 1990; 10 (3): 447—454
- [19] 懂峰明. 关于两类特殊图的色多项式唯一性. *数学学报*, 1991; 34 (2): 242—251
- [20] G. L. Chia. A Note On chromatic Uniqueness of Graphs. *J. of Graph Theory*, 1986; 10: 541—543

Graphical Chromatic Equivalence and Chromatic Uniqueness

Liu Ergen

ABSTRACT

It is surveyed known results of domestic and overseas graphical chromatic equivalence and chromatic uniqueness recently, and is also metioned some related questions.

Key words: Chromatic Polynomials; Chromatic equivalence; Chromatic uniqueness