第10卷 第1期
1993年3月

华东交通大学学报
Journal of East China Jiaotong University

Vol. 10 No. 1
Mar. 1993

谈谈各种积分的内在联系和统一记号

漆书家

（总务处）

摘 要

本文通过求质量问题，引出积分概念，用点函数统一积分记号，推导出重积分化为定积分的计算方法。思路直观、新颖。

关键词：重积分；点函数：积分法

积分学在各种知识领域中都有广泛的应用。现行教材大都分别从物理、力学、几何和工程技术中的问题引出积分概念。本文侧重总的思路、方法，建立它们的内在联系。

1 积分法

下面通过对非均匀细棒、平面薄片、空间物体的质量问题的研究，抽象出定积分、二重积分和三重积分的概念（类似地，曲线形物体和曲面形物体质量问题可引出曲线积分、曲面积分概念）。一般按下面三个步骤进行。

（1）给出任一分法。

比如说，将细棒分成n根小细棒；将平面薄片分成n块小平面薄片；将空间物体分成n个小空间物体。

（2）均匀化过程。

即在分法基础上，将未知问题用已知问题近似地表示出来。比如，密度非均匀的小细棒质量，用密度均匀的小细棒质量来近似地表示（密度在细棒上任意选定，此时密度在细棒上可看作是均匀的）。类似地，密度非均匀的小平面薄片质量用密度均匀的小平面薄片质量近似地表示；密度非均匀的小空间物体质量用密度均匀的小空间物体质量近似地表示。

（3）精确化过程。

均匀化以后，n根小细棒质量之和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；n块小平面薄片质量之和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；n个小空间物体质量之和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$分别是细棒、平面薄片和空间物体质量的近似

本文于1992年5月11日收到

值，且这些和与分法有关，与均匀化方式有关。但当密度 f（x），f（x，y），f（x，y，z）都是连续函数，而分法无限变细〔用 n 个小区间$\triangle x_i(i=1,2,\cdots,n)$的长度最大者$\|\triangle x\| \longrightarrow 0$（或 n 个小区域$\triangle\sigma_i$，$\triangle v_i$（i＝1，2，…，n）的最大直径$\|\triangle\sigma\| \longrightarrow 0$，$\|\triangle v\| \longrightarrow 0$）来刻划〕时，近似程度可以无限精确。

这样看来，当上述和式极限存在时，分别用这些和的极限来表示非均匀细棒、平面薄片和空间物体的质量是非常自然的。而三个和式的极限可分别抽象出定积分、二重积分和三重积分的概念（曲线积分、曲面积分也可类似地给出定义）。于是

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\triangle x\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\|\triangle\sigma\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\triangle\sigma_i$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \lim_{\|\triangle v\| \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\triangle v_i$$

2 “积分”的统一记号

从以上积分定义，我们能发现，如果将被积函数看作是积分域 Ω 上的点函数 f（P）则定积分、二重积分、三重积分都可统一在下面形式的记号

$$\int_\Omega f(P)dv$$

中.若记号中

（1）Ω 为直线上某一部分〔a，b〕，即 P 为〔a，b〕上的点，此时 dv 为长度元素，则它所表示的是定积分.即

$$\int_\Omega f(P)dv = \int_a^b f(x)dx$$

（2）Ω 为平面上某一部分 D，即 P 是平面区域 D 上的点，此时，dv 为面积元素，则它所表示的是二重积分.即

$$\int_\Omega f(P)dv = \iint_D f(x,y)d\sigma$$

（3）Ω 为空间几何体某一部分，即 P 是空间区域Ω上的点，此时 dv 为体积元素，则它所表示的是三重积分.即

$$\int_\Omega f(P)dv = \iiint_\Omega f(x,y,z)dv$$

当积分域 Ω 为曲线（或曲面），dv 是弧长元素（或曲面面积元素）时，上述记号还可表示为对弧长的曲线积分（或对面积的曲面积分）。

由上看出，各种类型积分可以全部统一在一个记号下面.这样做，既有助于深入认识各种

积分之间的区别与联系，也有利于对积分性质的推广。

3 建立重积分与单积分的联系

将重积分化成单积分计算，是重要的有效的计算方法。根据重积分表示物体质量的物理意义来探讨这种方法比较直观。

（1）当平面薄片D中各点的密度用f（x，y）表示时，平面薄片的质量为

$$M=\iint_D f(x,y)dxdy \quad (1)$$

将D投影到x轴上，投影区间为〔a，b〕，投影线分D的边界为两条曲线，上条曲线方程为$y=\varphi_2(x)$，下条曲线方程为$y=\varphi_1(x)$（如图1）在〔a，b〕上任取一点x，过x作一条直线穿过薄片得一细棒M_1M_2，细棒质量为

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

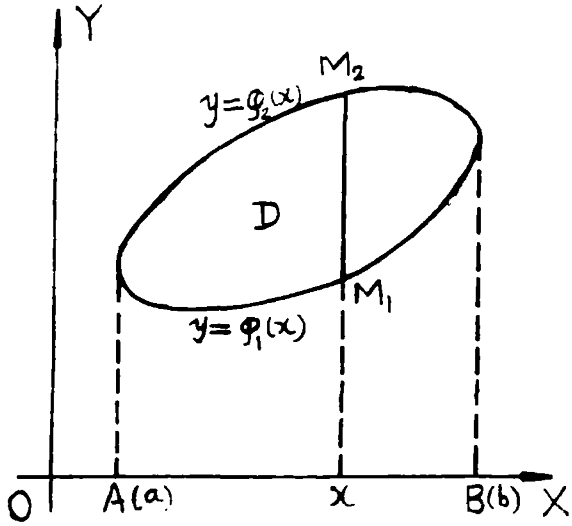

图 1

设想细棒M_1M_2质量集中于x点，则薄片D的质量在数值上等于细棒AB的质量。AB的线密度为

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

于是得到

$$M=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

由（1）式得出二重积分化为单积分的关系式为

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

（2）当物体Ω上各点的密度用f（x，y，z）表示时，物体的质量为

$$M=\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz \quad (2)$$

将Ω投影到xoy平面上，投影区域为D〔$a\leqslant x\leqslant b$，$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$〕、投影柱面分Ω的边界为两个侧面，上侧方程是$z=z_2(x,y)$，下侧方程是$z=z_1(x,y)$，（如图2），在D上任取一点

M，过M作一条直线垂直于xoy坐标面，穿过物体Ω，得一细棒M_1M_2，细棒质量为

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

设想细棒M_1M_2全部质量集中于M点，则物体Ω的质量在数值上等于平面薄片D的质量，D的面密度为

$$\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

于是得到

$$M=\iint\limits_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

这样，由(2)式，三重积分化为单积分的关系式为

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

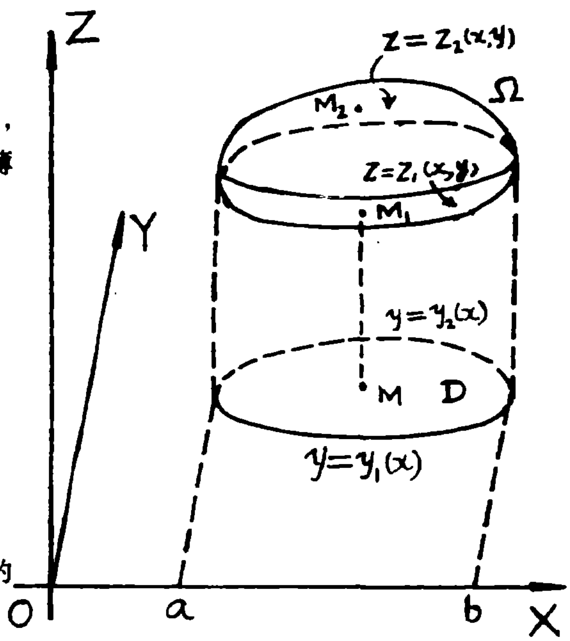

图 2

4　重积分换元公式的用法

定积分换元法是简化定积分式运算的重要方法之一。重积分也有类似的换元法。

$$\iint\limits_D f(x,y)d_xd_y=\iint\limits_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

例1　求由抛物线$y^2=x$，$y^2=2x$及双曲线$xy=2$，$xy=3$所围成的区域的面积

解　此题直接用直角坐标计算较为复杂。

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

其中D是由$y^2=x$　$y^2=2x$　$xy=2$　$xy=3$所围成的区域(图3)

作变换

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{x}=u\\ xy=v\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ y = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

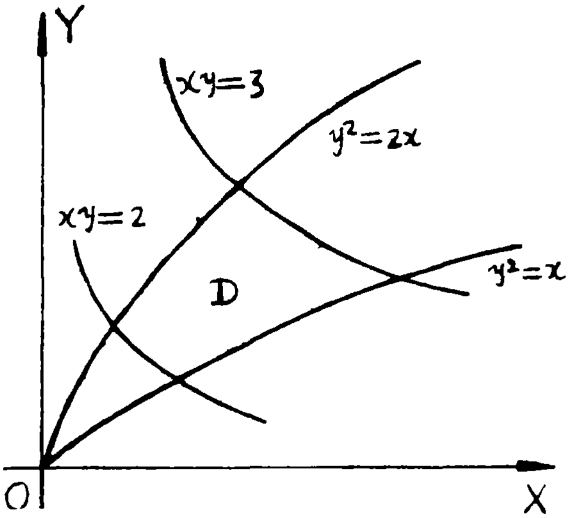

图　3

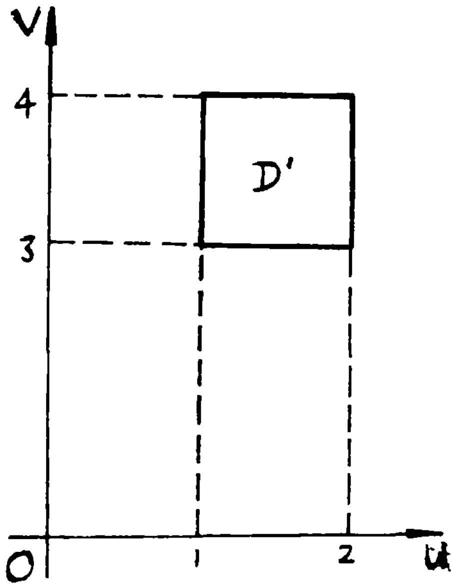

图　4

它将D变换为uv平面上的区域D′:1≤u≤2,2≤v≤3(图4)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}u^{-1}$$

故

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3u} dudv = \frac{1}{3}\int_2^3 dv \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{3} ln2$$

例2　计算三重积分$\iiint_\Omega zdxdydz$其中Ω为上半椭球域

$$\left\{(x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \quad , \quad z \geqslant 0\right\}$$

解　作变换

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi \\ y = br\sin\theta\sin\varphi \\ z = crcos\theta \end{cases}$$

此变换把Ω变换为长方体Ω′:$0 \leqslant r \leqslant 1 \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

由换元公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(r,\theta,\varphi),y(r,\theta,\varphi),z(r,\theta,\varphi)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|drd\theta d\varphi$$

其中 $$f(x,y,z)=z=cr\cos\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\sin\theta\cos\varphi & ar\cos\theta\cos\varphi & -ar\sin\theta\sin\varphi\\ b\sin\theta\sin\varphi & br\cos\theta\sin\varphi & br\sin\theta\cos\varphi\\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0\end{vmatrix}=abcr^2\sin\theta$$

$$\therefore\quad \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz=\iiint\limits_{\Omega'} cr\cos\theta abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 abc^2r^2\sin\theta\cos\theta dr=\frac{abc^2}{4}\pi$$

参考文献

南京工学院数学教研组编.高等数学(第二版).高等教育出版社,1985,173—174,190

On the Internal Relations of Integrals and Unification of Symbols

Qi Shujia

ABSTRACT

Through solving the problem of quality, the paper introduces the concept of integral, unifies the symbols of integral with the help of function of position, and derives casculation method of definite integral from double integral. It possesses the advantage of being easy and direct and something new.

Key words:Double Integral; Function of Position; Integration