

接触摩擦单元新模型的理论及应用

雷晓燕 李 宁

(建筑工程系) (陕西机械学院)

摘 要

本文提出了一种用于分析三维非线性接触摩擦问题的新模型。该模型以节点位移和接触应力作为基本未知量,考虑了四种接触条件:固定,滑动,张开和混合,能模拟具有初始裂缝和无初始裂缝两物体间的摩擦滑动、张开和闭合。基于增量形式的有限元法,建立了接触摩擦问题的等效单元刚度—约束矩阵和等效单元荷载向量。计算中,可用标准的有限元集成规则将其分别迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中,因而具有计算简单,程序设计容易的优点。作为应用实例,文章对广东龙坪来水拱坝进行了分析。

关键词:相互作用;接触问题;有限元

0 引 言

接触摩擦问题是岩土工程中重点研究的课题之一。在实际工程中,常常需要考虑物体间接触摩擦的影响。例如,土与结构,基础与地基,大坝与岩体间的相互作用。这类问题从本质上讲是非线性的,通常很难获得解析解。因而有限元数值方法就成为一种有吸引力的选择。在过去的数十年里,许多学者工作在该领域,致力于发展各种模拟接触问题的特殊单元^{[1]~[6]}。其中有代表性的工作要数 Goodman^[1], Katona^[2]和 Desai^[3]。接触单元^{[1],[3]}尤其适用于弹性接触的情况。在许多岩土接触问题中,弹性性质仍起着主导作用。对于具有张开,滑动行为的接触摩擦问题,约束单元^{[2],[6]}则是更好的选择。

由 Katona 提出的约束单元的节点未知数包含位移和接触力。按照一定的破坏准则,接触力可用于判断两接触物体张开与否。工程中常用的各种破坏准则,例如 Mohr-Coulomb,都是以应力表示的。因此,在接触分析中,必须求得接触应力。由接触力计算接触应力一般是很困难的,尤其在三维问题。这一则是由于接触面积 A_c 是未知的(图1),另一则是难以确定单元间的接触边界。为此,文章直接选取接触应力以代替接触力作为节点未知数,通过求解下列形式的有限元方程即可直接得到接触应力

本文于1992年11月9日收到

$$[K] \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{a}^* \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中: $[K]$ 为接触摩擦单元等效刚度——约束矩阵, 详见第四节; $\underline{a}$, $\underline{F}$ 分别为整体坐标系中增量节点位移向量和等效节点力向量; $\underline{\sigma}$, $\underline{a}^*$ 分别为局部坐标系中增量节点接触应力向量和给定的相对位移矢量或给定的节点接触应力矢量。

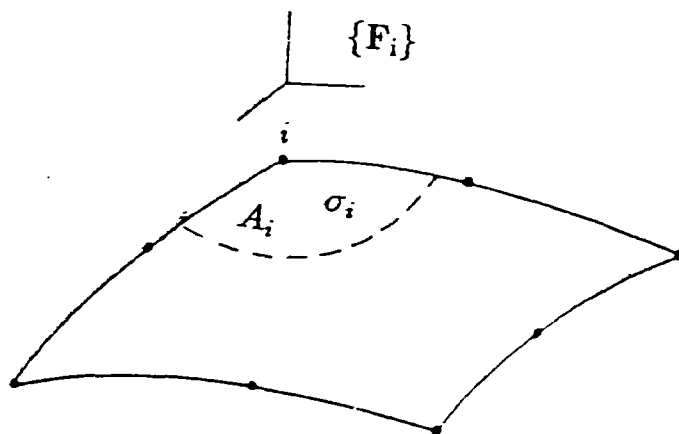


图 1 由接触力计算接触应力

为了模拟复杂的几何形状, 采用了 16 节点的等参元。运用虚位移原理并结合考虑几何和静力约束条件建立了等效单元刚度——约束矩阵和荷载向量。计算时可用标准的有限元集成规则将其分别迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

1 虚位移原理用于接触摩擦问题

考察三维接触摩擦问题, 我们用普通的有限元离散方法将其离散化, 对接触面上的单元布置双节点^[1]。整个问题的描述采用笛卡尔坐标系 x, y, z 。局部坐标系 n, s, t 则用于描述接触摩擦单元。

定义接触摩擦单元于图 2。运用虚位移原理, 得到

$$\delta \underline{a}^T \underline{F} = \int_r (\delta \underline{A})^T \underline{\Sigma} d\Gamma \quad (2)$$

其中: $\underline{a}$: 整体坐标系中的增量节点位移向量

$\underline{F}$: 整体坐标系中的等效增量节点力向量

$\underline{A}$: 局部坐标系中的增量相对位移向量

$\underline{\Sigma}$: 局部坐标系中的增量接触应力向量

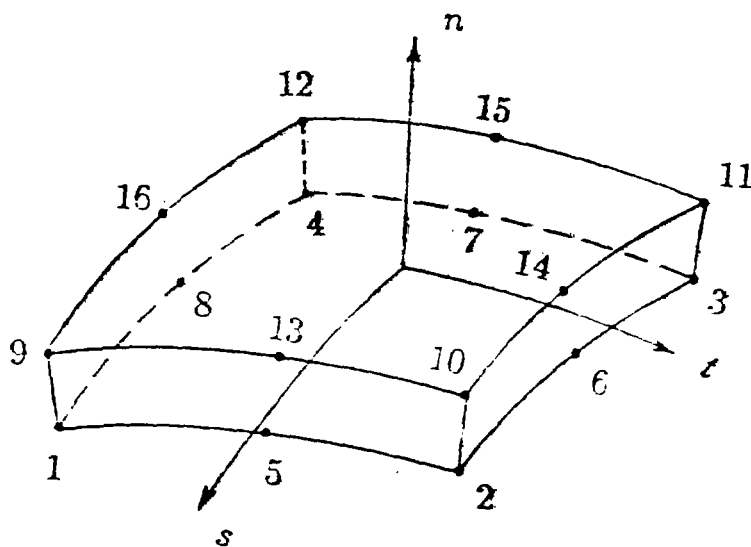


图2 局部坐标系中的接触摩擦单元

引入插值函数矩阵 $\underline{N}$, 则有

$$\underline{A} = \underline{N} \underline{\Delta a'} \quad (3)$$

$$\underline{\Sigma} = \underline{N} \underline{\sigma} \quad (4)$$

$$\underline{\Delta a'} = \underline{C} \underline{a} \quad (5)$$

其中

$\underline{\Delta a'}$: 局部坐标系中的增量节点相对位移向量。

$\underline{\sigma}$: 局部坐标系中的增量节点接触应力向量。

$\underline{C}$: 坐标转换矩阵

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -\underline{L}_1 & & 0 & \underline{L}_1 & & 0 \\ & -\underline{L}_2 & & & \underline{L}_2 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & & & -\underline{L}_8 & 0 & \underline{L}_8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{L}_i = \begin{bmatrix} l_{ix} & l_{iy} & l_{iz} \\ l_{ix} & l_{iy} & l_{iz} \\ l_{ix} & l_{iy} & l_{iz} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (8)$$

l_{nx} 为局部坐标轴 n 与整体坐标轴 x 之间夹角的方向余弦, 见附录 B。

将 (3), (4), (5) 代入 (2) 中, 有

$$\underline{C}^T \underline{S} \underline{\sigma} = \underline{F} \quad (9)$$

其中

$$\underline{S} = \int_{\Gamma} \underline{N}^T \underline{N} d\Gamma \quad (10)$$

2 接触面约束条件

在三维接触摩擦单元中, 接触条件可分成四类, 即固定, 滑动, 张开和混合型。

固定: 指裂缝闭合, 无滑动;

滑动: 指裂缝闭合, 但沿 s , t 两切线方向有滑动;

张开: 指裂缝未闭合;

混合型: 指裂缝闭合, 沿 s 方向有滑动, 但沿 t 方向无滑动; 或沿 t 方向有滑动, 但沿 s 方向无滑动。

对应于上述不同的接触状态, 接触面上的位移和应力应满足不同的平衡条件和连续条件。

接触摩擦单元的几何和静力约束方程可统一表示成

$$\{\underline{C}^1 \underline{R}\} \left\{ \begin{matrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{matrix} \right\} = \underline{a}^* \quad (11)$$

其中:

$\underline{C}^1$: 坐标转换矩阵

$\underline{R}$: 对角矩阵

$\underline{a}^*$: 给定的节点相对位移矢量或给定的节点接触应力矢量

$$\underline{C}^1 = \begin{bmatrix} -\underline{L}_1^1 & 0 & \underline{L}_1^1 & 0 \\ & -\underline{L}_2^1 & & \underline{L}_2^1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & -\underline{L}_3^1 & 0 & \underline{L}_3^1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 & 0 \\ & \underline{R}_2 \\ & & \ddots \\ 0 & & & \underline{R}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

假设节点对 (1, 9) 处于滑动状态, 节点对 (2, 10) 处于混合状态 (沿 s 方向滑动), 节点对 (3, 11) 处于张开状态, 其余节点对处于固定状态, 在这种情况下, (12), (13) 两式中的子矩阵 $\underline{L}_i^1$ 和 $\underline{R}_i$ 分别具有如下形式

$$\underline{L}_1^1 = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\underline{L}_2^1 = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{L}_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\underline{L}_i^1 = \begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{bmatrix}_i \quad (17)$$

($i = 4, 5, 6, 7, 8$)

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\underline{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\underline{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{R}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_i \quad (21)$$

($i = 4, 5, 6, 7, 8$)

$$\underline{a}^* = \{a_1, T_{11}, T_{12}, a_2, T_{21}, T_{22}, N_2, T_{23}, T_{24}, a_3, b_{31}, b_{32}, \dots, a_8, b_{81}, b_{82}\}^T \quad (22)$$

其中 a , b_1 , b_2 , N , T_1 和 T_2 的值由表 2 给定。

3 等效单元刚度—约束矩阵

从形式上, (9), (11) 两式可合写为

$$\begin{bmatrix} 0 & C^T S \\ C^T & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{a}^* \end{Bmatrix} \quad (23)$$

通过形成如下所示的刚度—约束矩阵 $\underline{K}_e$ 和荷载矢量 $\underline{f}_e$, 这种新单元可以在单元水平上进行

刚度和荷载的组装。

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} 0 & \underline{C}^T \underline{S} \\ \underline{C}^1 & \underline{R} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\underline{f}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{a}^* \end{Bmatrix} \quad (25)$$

(24)、(25)两式分别称为等效单元刚度—约束矩阵和等效单元荷载向量,可用标准的有限元集成规则迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

注意到由(24)式给出的刚度—约束矩阵是非对称的。通过将矩阵 $\underline{C}$ 分成 $\underline{C}^1 + (\underline{C} - \underline{C}^1)$ 和修改约束方程(11),可以得到对称的刚度—约束矩阵,详细内容可参见文献[11]。

4 计算步骤

接触摩擦问题需经多次迭代才能获得正确解。计算时,首先假设单元处于某种接触状态(固定,滑动,张开或混合型),按照假定的状态,分别计算等效单元刚度矩阵和等效荷载向量。解有限元方程后,得到一组试验解。将试验解进行接触状态检查,看其是否与原假设状态相同。若相同,说明原假设接触状态正确,相应的解即为正确解,计算结束。若不同,则选取试验解为新的假设状态,并修改荷载向量,进行新一轮迭代,直至收敛。

现给出主要计算步骤。假设在荷载步 k ,已进行了第 $(i-1)$ 次迭代,相应的位移和应力 $\underline{a}_{i-1}^k, \underline{\sigma}_{i-1}^k$ 已经求得,现考察第 i 次迭代的情况:

步骤1. 假设第 $(i-1)$ 次迭代时求得的接触状态为正确状态,按(24)式计算等效单元刚度—约束矩阵。

步骤2. 根据假设的接触状态,根据表2按(25)式形成等效单元荷载向量。

步骤3. 将等效单元刚度—约束矩阵和单元荷载向量分别组集到总刚度矩阵和总荷载向量中。

步骤4. 求解有限元方程,得到增量位移 $\underline{a}$ 和增量应力 $\underline{\sigma}$ 。

步骤5. 计算总位移和总应力

$$\begin{aligned} \underline{a}_i^k &= \underline{a}_{i-1}^k + \underline{a} \\ \underline{\sigma}_i^k &= \underline{\sigma}_{i-1}^k + \underline{\sigma} \end{aligned}$$

步骤6. 按表1对每一节点对选择新的接触状态。

步骤7. 检查新的接触状态是否与原假设相同,若相同,判别计算是否收敛,若收敛,计算结束,转新的荷载增量步。否则,转步骤1.进行新的下一轮迭代。

表1给出了各个荷载步中每次迭代进行接触状态检查的判据。表2为给定的约束荷载向量。

本文采用了最大拉应力和Mohr-Coulomb剪切滑动破坏准则,即

$$\sigma \leq [\sigma] \quad \tau \leq [\tau] \quad (26)$$

其中

$$[\tau] = C - \sigma \operatorname{tg} \varphi \quad (27)$$

C为粘性系数, φ 为内摩擦角, σ 为正值时表示拉应力。

表1 接触状态判别表

迭代步 (i)	固 定	滑 动	混 合	张 开
(i-1) 固 定	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\tau_n < [\tau_n]$ $\tau_t < [\tau_t]$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\tau_n > [\tau_n]$ $\tau_t > [\tau_t]$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\tau_n > [\tau_n]$ $\tau_t < [\tau_t]$ or $\tau_n < [\tau_n]$ $\tau_t > [\tau_t]$	$\sigma_n > [\sigma_n]$
滑 动	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] < 0$ $\Delta w' [\tau_t] < 0$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] > 0$ $\Delta w' [\tau_t] > 0$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] > 0$ $\Delta w' [\tau_t] < 0$ or $\Delta v' [\tau_n] < 0$ $\Delta w' [\tau_t] > 0$	$\sigma_n > [\sigma_n]$
混 合	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] < 0$ $\tau_n < [\tau_n]$ or $\tau_n < [\tau_n]$ $\Delta w' [\tau_t] < 0$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] > 0$ $\tau_n > [\tau_n]$ or $\tau_n > [\tau_n]$ $\Delta w' [\tau_t] > 0$	$\sigma_n < [\sigma_n]$ $\Delta v' [\tau_n] > 0$ $\tau_n < [\tau_n]$ or $\Delta v' [\tau_n] < 0$ $\tau_n > [\tau_n]$ or $\tau_n > [\tau_n]$ $\Delta w' [\tau_t] < 0$ or $\tau_n < [\tau_n]$ $\Delta w' [\tau_t] > 0$	$\sigma_n > [\sigma_n]$
张 开	$\Delta u' + g < 0$			$\Delta u' + g > 0$

表2 给定的荷载向量 $\bar{a}$

荷载步 (k)	固 定	滑 动	混 合	张 开
(k-1) 固 定 滑 动 混 合	$a=0$ $b_n=0$ $b_t=0$	$a=0$ $T_n = [\tau_n]^k - \tau_n^{k-1}$ $T_t = [\tau_t]^k - \tau_t^{k-1}$	$a=0$ $T_n = [\tau_n]^k - \tau_n^{k-1}$ $b_n=0$ or $T_t = [\tau_t]^k - \tau_t^{k-1}$ $b_t=0$	$N = -\sigma_n^{k-1}$ $T_n = -\tau_n^{k-1}$ $T_t = -\tau_t^{k-1}$
张 开	$a = -(\Delta u')^{k-1} - g$ $b_n = \Delta v' \left \frac{a}{\Delta u'} \right $ $b_t = \Delta w' \left \frac{a}{\Delta u'} \right $	$a = -(\Delta u')^{k-1} - g$ $T_n = [\tau_n]^k$ $T_t = [\tau_t]^k$	$a = -(\Delta u')^{k-1} - g$ $T_n = [\tau_n]^k$ $b_n = \Delta w' \left \frac{a}{\Delta u'} \right $ or $T_t = [\tau_t]^k$ $b_t = \Delta v' \left \frac{a}{\Delta u'} \right $	$N=0$ $T_n=0$ $T_t=0$

表中, $[\sigma_n]$ 为局部坐标系中沿 n 方向的最大容许法向应力; $[\tau_s]$, $[\tau_t]$ 分别为沿 s , t 方向的最大容许剪应力; g 为沿 n 方向的初始裂缝。

5 拱坝—基础相互作用分析

作为应用实例,我们用本文提出的接触摩擦单元对泉水混凝土拱坝进行了有限元分析。该拱坝位于广东省龙川县南水河上游,以发电为目的。电站由双曲混凝土拱坝和发电厂房所组成,见图 3。

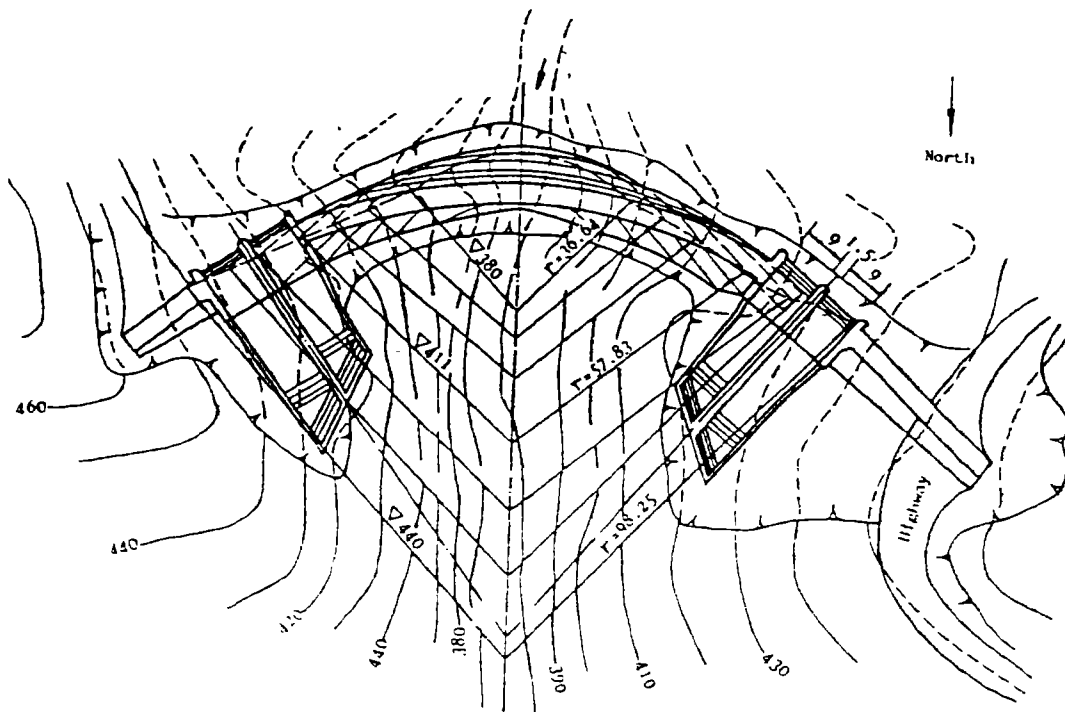


图 3 泉水拱坝示意图

拱坝的材料性质如下:

坝型: 混凝土双曲拱坝

坝高: 80m

坝长: 209m

最大中心角: $101^{\circ}24'$

高宽比: 2.31

坝顶厚度: 3m

坝底厚度: 9m

宽高比: 0.125

基础岩体: 斑状花岗岩

混凝土量: $51,000\text{m}^3$

利用对称性, 取一半坝体作为计算模型。拱坝划分成 134 个实体三维元, 坝体与岩基之间设置接触单元, 节点总数为 924。材料参数选择为:

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \times 10^4 \text{ Mpa}, & \gamma &= 0.25 \\ \rho &= 20 \text{ kN/m}^3, & C &= 3.0 \text{ Mpa} \\ \varphi &= 30^\circ, & [\sigma] &= 2.8 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

计算中, 考虑库区蓄水位分别为 70m 和 80m 两种工况。当库区蓄水位为 70m 时, 拱坝无裂缝产生, 本文的数值解与弹性有限元分析结果相同。

当库区蓄水位为 80m, 即水位与坝顶平齐。这时在坝底出现了微裂缝。相应的计算结果用 FEMVUE 程序图形表示 (图 4~图 10)。其中图 4 表示 σ_x , 与作用在拱坝迎水面上的静水压力相近; 图 5 表示 σ_y , 迎水面的中心部分承受较大的压应力; 图 6 表示 σ_z , 在坝底与基岩接触处有较大的拉应力出现。图 7~图 9 分别表示沿 x , y , z 方向的位移变形情况。从中看到, 在坝底出现了细小的裂缝, 这是因为库区水位提高后, 坝趾处存在较大的拉应力。图 10 为拱坝中心线的径向位移及与弹性分析结果的比较。尽管在坝趾有微裂缝, 但对变形的影响不大, 说明即使蓄水位与坝顶平齐时, 拱坝仍是稳定和安全的。

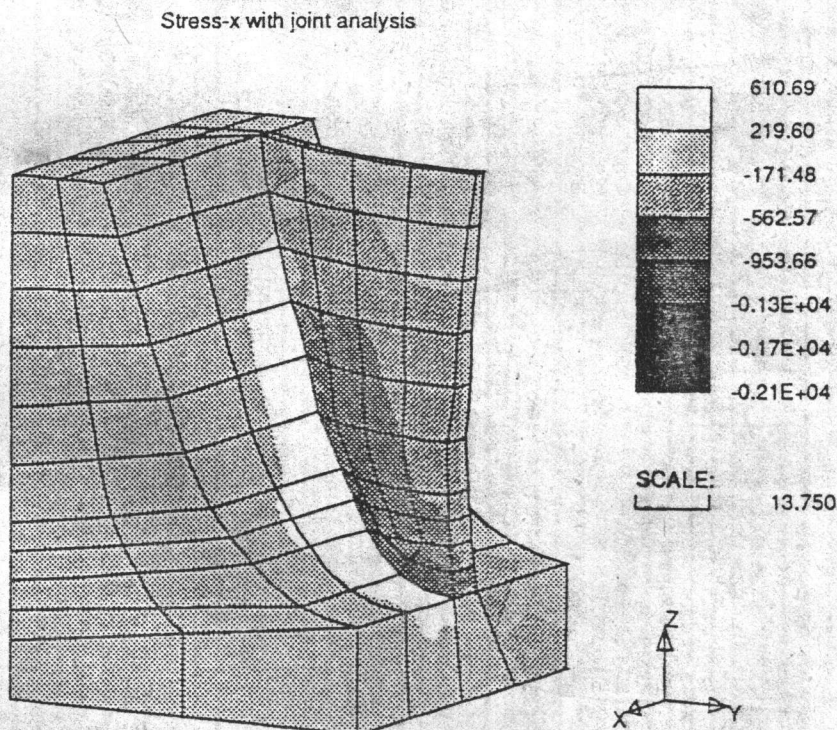
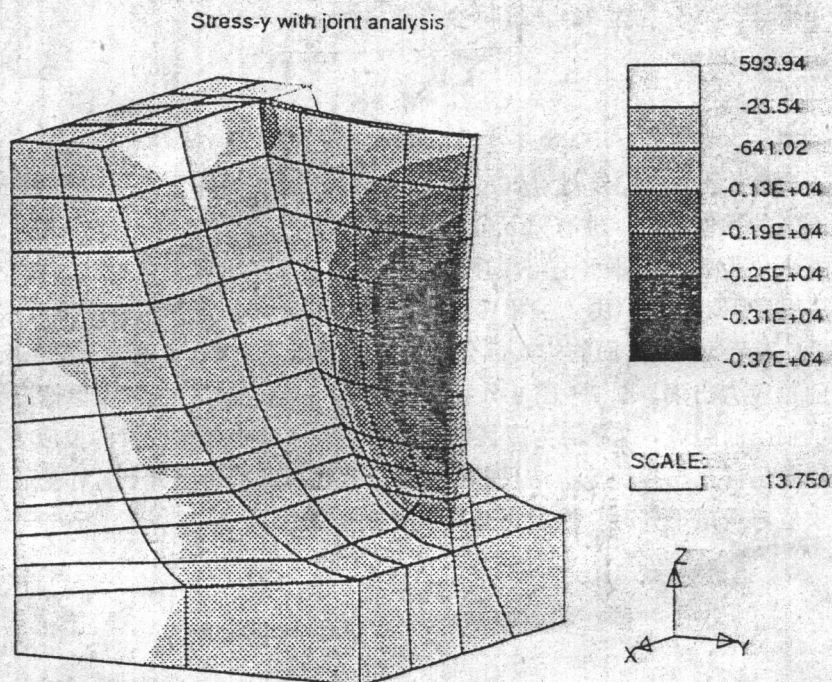
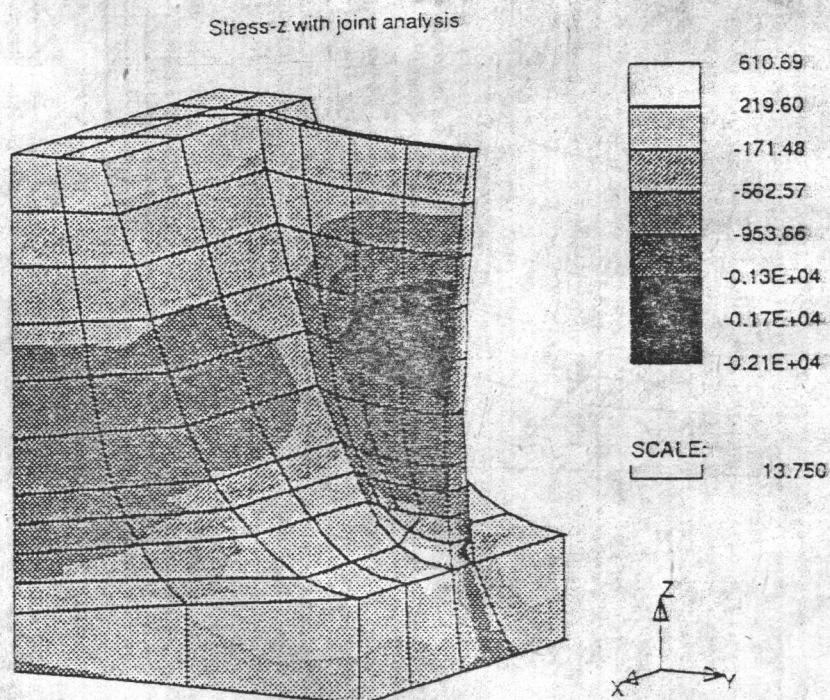


图 4 σ_x 应力分布

图5 σ_y 应力分布图6 σ_z 应力分布

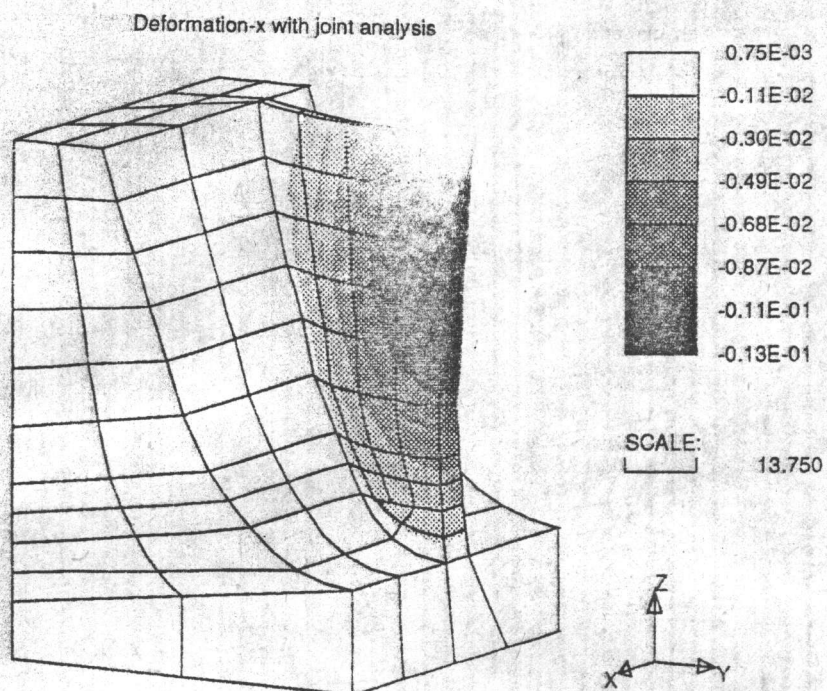


图 7 x 方向位移

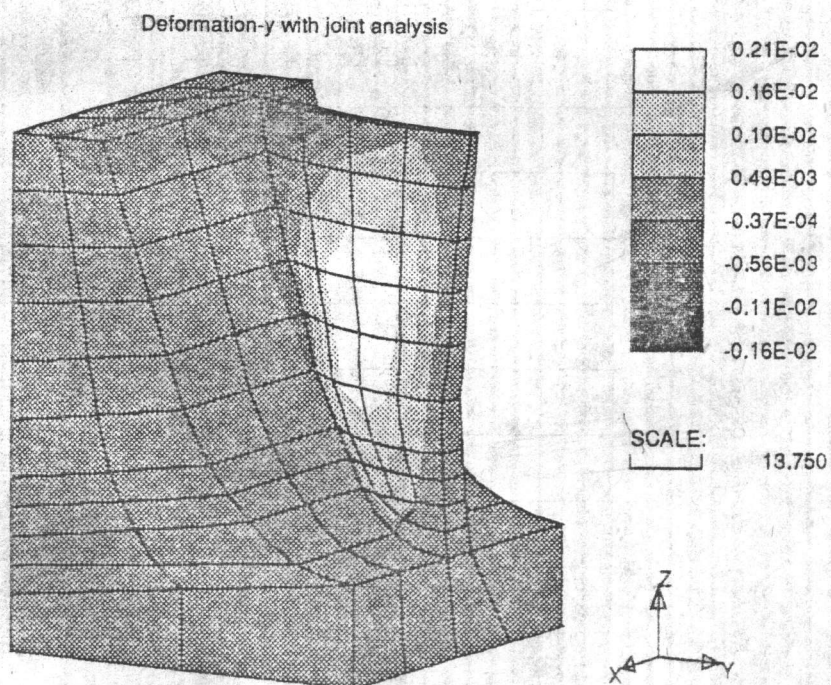


图 8 y 方向位移

Deformation-z with joint analysis

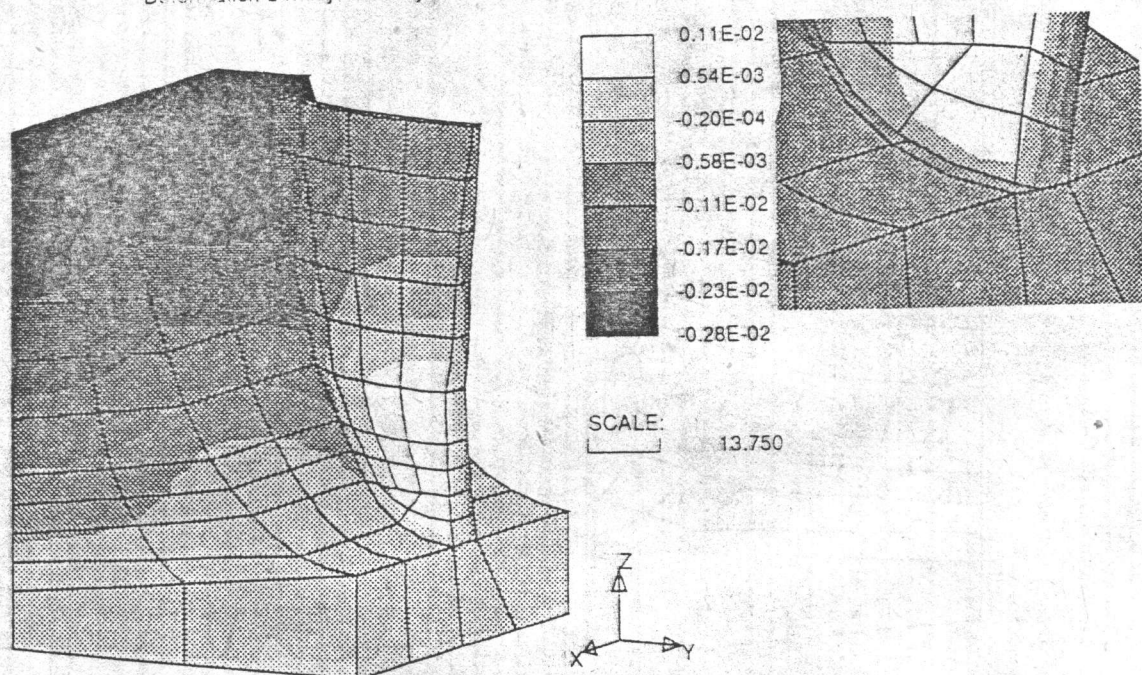


图 9 z 方向位移

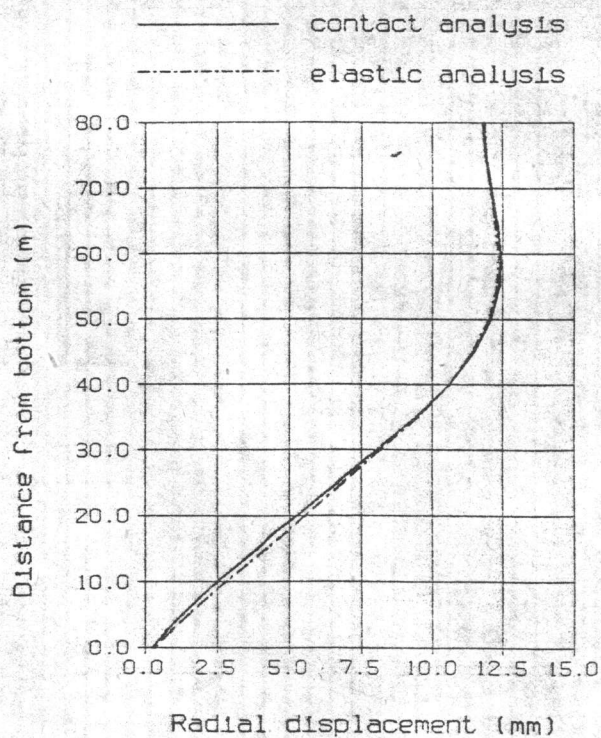


图 10 拱坝中心线径向位移

6 结 论

(1) 文中提出的用于分析三维非线性接触摩擦问题的新模型具有一般性, 是分析这类问题有效的数值方法。

(2) 等效单元刚度—约束矩阵和等效荷载向量的形成简化了程序设计的工作。

(3) 单元以节点接触应力作为基本未知量既提高了应力的精度又使得该方法容易处理工程实际问题。

(4) 该方法具有计算稳定, 收敛快的优点。

本文所介绍的工作是中国—奥地利合作项目“Safety of Dams”的部分成果, 该项目获得了奥地利自然科学基金的赞助。

附 录 A

x, y, z : 整体笛卡尔坐标系

n, s, t : 局部曲线坐标系

$\underline{a}$: 整体坐标系中增量节点位移向量

$$\underline{a} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \cdots \ u_{16} \ v_{16} \ w_{16}\}^T$$

$\underline{F}$: 整体坐标系中增量等效节点力向量

$$\underline{F} = \{F_{x1} \ F_{y1} \ F_{z1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{z2} \ \cdots \ F_{x16} \ F_{y16} \ F_{z16}\}^T$$

$\underline{A}$: 局部坐标系中增量相对位移矢量

$$\underline{A} = \{\Delta u', \ \Delta v', \ \Delta w'\}^T$$

$\underline{\Sigma}$: 局部坐标系中增量接触应力矢量

$$\underline{\Sigma} = \{\sigma, \ \tau_s, \ \tau_t\}^T$$

$\Delta \underline{\alpha}'$: 局部坐标系中增量节点相对位移矢量

$$\Delta \underline{\alpha}' = \{\Delta u'_1 \ \Delta v'_1 \ \Delta w'_1 \ \cdots \ \Delta u'_8 \ \Delta v'_8 \ \Delta w'_8\}^T$$

$\underline{\sigma}$: 局部坐标系中增量节点接触应力矢量

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_1 \ \tau_{s1} \ \tau_{t1} \ \cdots \ \sigma_8 \ \tau_{s8} \ \tau_{t8}\}^T$$

附 录 B

在接触摩擦单元中, 仅用中面的八个节点定义单元的几何形状, 如图 11 所示。

有关公式如下

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi_0) \quad i = 5, 7 \quad (B-1)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad i = 6, 8$$

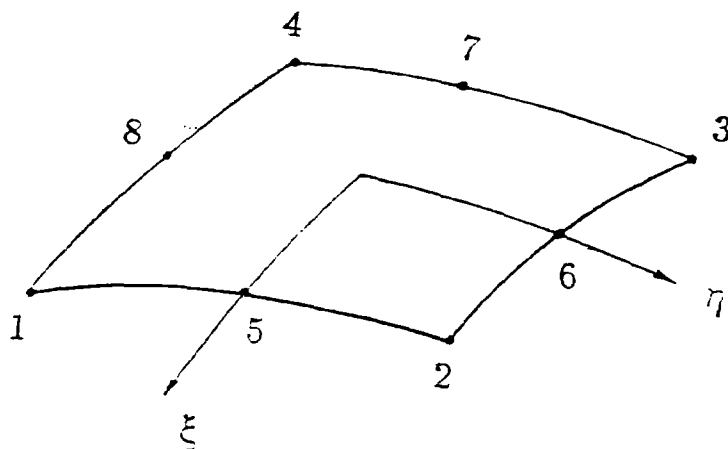


图 11 局部坐标系

其中: $\xi_0 = \xi \xi$, $\eta_0 = \eta \eta$

为了在单元内任意一点 (ξ, η) 建立局部坐标系 n, s, t , 我们作如下两条切线

$$\begin{aligned} d\vec{\xi} &= (\vec{i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \vec{j} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \vec{k} \frac{\partial z}{\partial \xi}) d\xi \\ d\vec{\eta} &= (\vec{i} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \vec{j} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \vec{k} \frac{\partial z}{\partial \eta}) d\eta \end{aligned} \quad (B-2)$$

其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为整体坐标系中的单位矢量。

令

$$\begin{aligned} \vec{n} = d\vec{\xi} \times d\vec{\eta} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} \\ &= n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \end{aligned} \quad (B-3)$$

其中

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ n_y &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ n_z &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (B-4)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (B-5)$$

$$l_{nx} = \frac{n_x}{|\vec{n}|} \quad l_{ny} = \frac{n_y}{|\vec{n}|} \quad l_{nz} = \frac{n_z}{|\vec{n}|} \quad (B-6)$$

$$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k} \quad (B-7)$$

$$s_x = 0 \quad s_y = l_{nx} \quad s_z = -l_{ny} \quad (B-8)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{l_{nx}^2 + l_{ny}^2} \quad (B-9)$$

$$l_{sx} = \frac{s_x}{|\vec{s}|} \quad l_{sy} = \frac{s_y}{|\vec{s}|} \quad l_{sz} = \frac{s_z}{|\vec{s}|} \quad (B-10)$$

如果 $\vec{n} \parallel \vec{i}$, 则我们用 $\vec{s} = \vec{n} \times \vec{j}$ 代替 (B-7), 在这种情况下, 有

$$\vec{s} = \vec{n} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k} \quad (B-11)$$

$$s_x = -l_{nz} \quad s_y = 0 \quad s_z = l_{nx} \quad (B-12)$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{l_{nz}^2 + l_{nx}^2} \quad (B-13)$$

$$l_{sx} = \frac{s_x}{|\vec{s}|} \quad l_{sy} = \frac{s_y}{|\vec{s}|} \quad l_{sz} = \frac{s_z}{|\vec{s}|} \quad (B-14)$$

$$\vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \\ l_{sx} & l_{sy} & l_{sz} \end{vmatrix} = t_x \vec{i} + t_y \vec{j} + t_z \vec{k} \quad (B-15)$$

其中

$$\begin{aligned} t_x &= l_{ny}l_{nz} - l_{ny}l_{nx} \\ t_y &= l_{nx}l_{nz} - l_{nx}l_{nz} \\ t_z &= l_{nx}l_{ny} - l_{nx}l_{ny} \end{aligned} \quad (B-16)$$

$$|\vec{t}| = \sqrt{t_x^2 + t_y^2 + t_z^2} \quad (B-17)$$

$$l_{tx} = \frac{t_x}{|\vec{t}|} \quad l_{ty} = \frac{t_y}{|\vec{t}|} \quad l_{tz} = \frac{t_z}{|\vec{t}|} \quad (B-18)$$

数值积分

$$S = \int_{\Gamma} N^T N d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N |J| d\xi d\eta \quad (B-19)$$

$$|J| = \frac{ds}{d\xi d\eta} = \frac{|\vec{d\xi} \times \vec{d\eta}|}{d\xi d\eta} \quad (B-20)$$

其中 $d\xi$, $d\eta$ 由 (B-2) 给出

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (B-21)$$

参 考 文 献

- [1] R. E. Goodman, R. L. Taylor, and T. L. Brekke, A model for the mechanics of jointed rock, J. Soil Mech. Dn. A.S.C.E., 94, SM3 (1968)
- [2] M. G. Katona, A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 7, 371-384 (1983)
- [3] C. S. Desai, M. M. Zaman, J. G. Lighter and H. J. Siriwardane, Thin layer element for interfaces and joints, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 8, 19-43 (1984)
- [4] M. A. Mehtab, and R. E. Goodman, Three-dimensional finite element analysis of jointed rock slopes, Proc. 2nd Congress of the Int. Soc. of Rock Mech., 3, Belgrade (1970)
- [5] G. N. Pande, N. Bicanic, and O. C. Zienkiewicz, Influence of joint interface nonlinearity on strengthening of dams, Short comm., Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 3, 293-300 (1979)
- [6] G. Swoboda, H. Ebner, S. J. Wang and J. M. Zhang, Application of the decoupled finite element analysis in tunnelling, Numerical Methods in Geomechanics (Innsbruck), Swoboda Edt (1988)
- [7] S. H. Chan and I. S. Tuba, A finite element method for contact problems of solid bodies, International Journal of Mechanical sciences, 13, 615-639 (1971)
- [8] N. Okamoto and M. Nakazawa, Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, 337-357 (1979)

Theory and Application for the New Model of Contact and Friction Element

Lei Xiaoyan Li Ning

ABSTRACT

A new model for three-dimensional non-linear contact problems with irreversible friction is presented here. Taking displacements and contact stresses as node parameters and considering four contact conditions, i. e. fixed, slip, free and mixed, this model can simulate frictional slippage, decoupling and re-bonding of two bodies initially mating at a common interface or with any initial gaps. Based on the finite element method and load incremental theory, the equivalent element stiffness-constraint matrix and load vector are obtained, which can be assembled into global stiffness matrix and global load vector. This method is shown to be simple in computation and to be easy in programming. As an application example, Quanshui Arch Dam located in Ruyuan County of Guangdong province in southern China is analyzed.

Key words: Interaction; contact problem; finite element method