

Fuzzy 拓扑空间中的局部连通性

汪火云

(基础课部)

摘 要

本文在 Fuzzy 拓扑空间上引入了局部连通的定义, 并对它的性质进行了探讨。

关键词: 局部连通; Fuzzy 拓扑

文献 [1] 引进了 Fuzzy 拓扑空间中的连通定义, 本文在 [1] 的基础上, 引进了 Fuzzy 拓扑空间中的局部连通的定义。 (X, J) 表示一个 Fuzzy 拓扑空间, 有时简记为 X , 为了行文方便, 重新叙述一些术语。

定义 1^[1] 仅在点 $x \in X$ 处取值 $\lambda \in (0, 1]$, 在其余点取零值的 Fuzzy 集称作 X 上 Fuzzy 点, 常记作 x_1 , 点 x 称作它的承点 (supp)。

定义 2^[1] 设 (X, J) 是 Fuzzy 拓扑空间, Fuzzy 集 A 称为点 x_1 的邻域, 若存在 Fuzzy 开集 B , 使 $x_1 \in B \subset A$, Fuzzy 点 x_1 的所有邻域组成的集称为 Fuzzy 点 x_1 的邻域簇。

定义 3 x_1 是 (X, J) 的一个 Fuzzy 点, J 的子簇 J_0 称作点 x_1 的局部基, 若 $\forall A \in J$ 且 $x_1 \in A$, 存在 $B \in J_0$, 使 $x_1 \in B \subset A$ 。

定义 4^[1] A_1, A_2 是 (X, J) 的两个 Fuzzy 集, A_1, A_2 说是 Q -隔离的, 若存在 J 中的闭集 H_1, H_2 , 使 $H_1 \supset A_1, H_2 \supset A_2$ 且 $H_1 \cap A_2 = A_1 \cap H_2 = \emptyset$ 即 A_1, A_2 是 Q -隔离的 $\Leftrightarrow \bar{A}_1 \cap A_2 = \bar{A}_2 \cap A_1 = \emptyset$ 。

定义 5^[1] (X, J) 的 Fuzzy 集 D 说是不连通的, 若在子空间 $D_0 = \text{supp } D$ 中存在非空的 Q -隔离集 A, B , 使得 $D = A \cup B$, 一个 Fuzzy 集说是连通的 $\Leftrightarrow$ 它是非不连通的。

定义 6 设 x_1, y_1 是 (X, J) 中的两个 Fuzzy 点, 如果在 X 中存在同时包含 x_1, y_1 的连通子集, 则称点 x_1, y_1 是连通的。

从上面的定义知, 若 x_1, y_1, z_1 是 (X, J) 中的 Fuzzy 点, 则有:

- (1) x_1, x_1 是连通的。
- (2) 若 x_1, y_1 是连通的, 则 y_1, x_1 是连通的。
- (3) 若 x_1, y_1 连通; y_1, z_1 连通, 则 x_1, z_1 连通。

因为 (1) 若 x_1 是不连通的, 则存在 $\text{supp } x_1$ 中的非空的 Q -隔离子集 A, B , 使 $x_1 = A \cup$

本文于 1992 年 6 月 23 日收到

B, 显然 $A_0 = B_0 = x$, 由 [1] 中定理 9.1 知, 与 $A_0 \cap B_0 = \emptyset$ 矛盾.

(2) 是显然的

(3) 若 x_1, y_1 连通, 则存在包含 x_1, y_1 的连通集 Y_1 ; 由于 y_1, z_1 连通, 则存在包含 y_1, z_1 的连通集 Y_2 . 由于 $y_1 \in Y_1 \cap Y_2$, 则 $Y_1 \cup Y_2$ 于 $\text{supp}(Y_1 \cup Y_2)$ 中是非 Q-隔离的, 由 [1] 中定理 10.2 知, $Y_1 \cup Y_2$ 是连通的, 故 x_1, z_1 是连通的.

因此, Fuzzy 点的连通关系为等价关系.

定义 7 (X, J) 对于 Fuzzy 点的连通关系而言的每一等价类, 称为 X 的连通分支.

由等价关系的性质知: 每一连通分支非空; X 的不同连通分支无交; X 为所有连通分支之并.

定理 1 设 C 为 (X, J) 的连通分支, 则有:

(1) 若 Y 是 X 的连通集, 且 $Y \cap C \neq \emptyset$, 则有 $Y \subset C$.

(2) C 是 X 的连通集.

(3) C 是 X 的闭集.

证明 (1) 若 $Y \cap C \neq \emptyset$, 则存在 $x_1 \in Y \cap C$, C 为 x_1 的连通分支. $\forall y_1 \in Y$, 则 x_1, y_1 连通, 从而 $y_1 \in C$, 故 $Y \subset C$.

(2) 取 $x_1 \in C$, $\forall y_1 \in C$, 存在包含 x_1, y_1 的连通集 $Y(y_1)$, 由 (1) 知 $Y(y_1) \subset C$, 显然 $C = \bigcup \{Y(y_1): y_1 \in C\}$, 由于每个 $Y(y_1)$ 都含有 x_1 , 故由 [1] 中定理 10.2 知, C 是连通的.

(3) 由于 C 是连通的, 由 [1] 中定理 10.1 知 $\bar{C}$ 亦是连通的, 由 (1) 知 $\bar{C} \subset C$, 故 C 是闭集.

定义 8 x_1 为 (X, J) 的 Fuzzy 点, 若存在由连通集组成的点 x_1 的局部基, 称 X 在点 x_1 处是局部连通的.

若 X 在它的每一个 Fuzzy 点处都是局部连通的, 则称 X 是局部连通的.

定理 2 (X, J) 为局部连通的 $\iff X$ 有连通集组成的基.

证明 “ $\Rightarrow$ ” 设 U 为 J 中的 Fuzzy 开集, 则 $\forall x_1 \in U$, 由于 X 是局部连通的, 则存在连通开集 $V(x_1)$, 使 $x_1 \in V(x_1) \subset U$, 显然 $U = \bigcup \{V(x_1): x_1 \in U\}$, 故 X 有一连通集组成的基.

“ $\Leftarrow$ ” 若 X 存在由连通集组成的基 B , 显然, $\forall x_1 \in X$, $B(x_1) = \{B \in B: x_1 \in B\}$ 为 x_1 的局部基, 故 (X, J) 是局部连通的.

定理 3 设 U 为 (X, J) 中的 Fuzzy 开集, C 是 X 的连通分支, 且 $C \subset U$. 若 X 是局部连通的, 则 C 是 X 的 Fuzzy 开集.

证明 若 $\forall x_1 \in C$, 则 $x_1 \in U$, 由于 X 是局部连通的, 则存在连通开集 $V(x_1)$, 使 $x_1 \in V(x_1) \subset U$. 由于 $V(x_1) \cap C \neq \emptyset$, 则由定理 1 (1) 知, $V(x_1) \subset C$, 显然 $C = \bigcup \{V(x_1): x_1 \in C\}$, 故 C 为 Fuzzy 开集.

定理 4 如果积空间 $\Pi \{X_\lambda: \lambda \in A\}$ 的每一因子空间是局部连通空间, 且除有限个外都是连通的, 则积空间亦是局部连通的.

证明 设每一个 X_λ 都是局部连通的, 并且除 $X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n}$ 外都是连通的, 要证明积空间 $\Pi \{X_\lambda: \lambda \in A\}$ 是局部连通的. 设 x 是积空间的任意一个 Fuzzy 点, 又设 V 是点 x 的邻域.

据积空间的定义, 存在有限个下标, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. 又设 $P_{\lambda_i}(x) = x_{\lambda_i}$, 则 x_{λ_i} 为 X_{λ_i} 的 fuzzy 点, 存在 x_{λ_i} 的开邻域 V_{λ_i} ($i=1, 2, \dots, r$), 使 $V = \bigcap_{i=1}^r P_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$. 由于每个 X_{λ_i} 都是局部连通的, 故对于 $\lambda = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 存在连通的开邻域 G_{λ_i} , 使 $x_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$. 现考虑积空间的子集 $\Pi \{Z_{\lambda_i}: \lambda \in A\}$, 其中 Z_{λ_i} 定义为: 当 $\lambda = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 时, $Z_{\lambda_i} = G_{\lambda_i}$; 否则 $Z_{\lambda_i} = X_{\lambda_i}$. 显然 $x \in \Pi \{Z_{\lambda_i}: \lambda \in A\} \subset V$. 据 [2] 中定理 15 知, $\Pi \{Z_{\lambda_i}: \lambda \in A\}$ 是连通的开集, 于是, 对于任意 Fuzzy 点 x 及 x 的一个开邻域 V , 我们求得了一个包含点 x 的而含于 V 的连通开集 $\Pi \{Z_{\lambda_i}: \lambda \in A\}$. 因此, $\Pi \{X_{\lambda_i}: \lambda \in A\}$ 是局部连通空间.

定理 5 如果积空间 $\Pi \{X_{\lambda_i}: \lambda \in A\}$ 是局部连通空间, 且每一因子空间是满层空间, 则每一因子空间是局部连通的, 除有限个外, X_{λ_i} 都是连通的.

证明 设积空间是局部连通的, 又设 x_{λ_i} 是 X_{λ_i} 的任一 Fuzzy 点, x_{λ_i} 的任一开邻域为 V_{λ_i} . 证明存在 x_{λ_i} 的连通开邻域含于 V_{λ_i} . 考虑积空间中满足 $P_{\lambda_i}(x) = x_{\lambda_i}$ 的任一 Fuzzy 点 x , 显见 $x \in P_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$. 据积空间的局部连通性, 积空间中存在一连通开集 G , 使 $x \in G \subset P_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i})$. 于是 $P_{\lambda_i}(G)$ 是连通的开集 ([2] 中定理 2, 定理 6), $P_{\lambda_i}(G) \subset V_{\lambda_i}$, 且 $x_{\lambda_i} \in P_{\lambda_i}(G)$, 这就证明了因子空间 X_{λ_i} 是局部连通的. 再证因子空间除有限个外都是连通的.

设 x 是积空间中的任意一个 Fuzzy 点, 设 x 含在 V 内. 由积空间定义, 存在有限个 λ_i , 使 $V = \bigcap_{i=1}^r P_{\lambda_i}(V_{\lambda_i})$, 其中 V_{λ_i} 是 X_{λ_i} 的开集, 而 $x_{\lambda_i} = P_{\lambda_i}(x)$. 于是只要 $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, $P_{\lambda_i}(V) = X_{\lambda_i}$, 由于 V 连通, 知 X_{λ_i} 是连通的 ([2] 中定理 2), 故因子空间除有限个外都是连通的.

定理 6 设 f 是 $(X, J) \rightarrow (Y, U)$ 的连续开映射, 且由 $X \rightarrow Y$ 的满射 f 导出的^[3]. 若 X 是局部连通的, 则 (Y, U) 亦是局部连通的.

证明 由于 X 是局部连通的, 由定理 2, 存在由连通集组成的基 B , $B' = \{f(B): B \in B\}$ 是 Y 的连通开集 ([2] 中定理 2). 另一方面, 对 Y 中的任一开集 U , $f^{-1}[U]$ 为 B 中某些成员之并, 从而 $U = ff^{-1}[U]$ 为 B' 中某些成员之并 (由于 f 是满射, 才有 $ff^{-1}[U]$), 故 B' 为 Y 的基, 又由定理 2 知, (Y, U) 是局部连通的.

参 考 文 献

- [1] Pu PAO-Ming, Liu, Ying-Ming, Fuzzy Topology I, Neighborhood structure of a Fuzzy point and Moor-smith Convergence. J. Math. Anal. Appl. 1980 (76): 571-599
- [2] 蒲保明, 刘应明. 不分明拓扑学中的乘积空间与商空间. 科学通报, 1979 (3): 97-100
- [3] C. K. Wong, Fuzzy points and local properties of fuzzy Topology. J. Math. Anal. Appl. 1974 (46): 316-328

Local Connectness in Fuzzy Topological Spaces

Wang Huoyun

ABSTRACT

In this paper, We introduce a definition for locally connected in fuzzy topological spaces and discuss its properties.

Key words: Locally connected; Fuzzy topological spaces