

一类图的构造与优美性

邓毅雄

(基础部)

摘 要

本文构造了桥梁图 $Q(2n; k)$, 并对其优美性进行了讨论, 得到当 $n \geq 3k$ 时, $Q(2n; k)$ 是优美图, 并提出了一个猜想。

关键词: 优美图; k -桥梁图

定义1 设 $G = (V, E)$ 是简单图, 若对每一个 $v \in V$, 存在一个整数 $f(v)$, 使满足:

(1) $\forall u, v \in V$, 若 $u \neq v$, 则 $f(u) \neq f(v)$;

(2) $\max \{f(v) \mid v \in V\} = |E|$;

(3) $\forall e', e'' \in E$, 若 $e' \neq e''$, 则 $\omega(e') \neq \omega(e'')$. 这里 $\omega(e) = |f(u) - f(v)|$, 若 $e = uv \in E$. 则称 G 是优美图 (graceful graph). 且这里, 称 $f(v)$ ($v \in V$) 为标号函数; $\omega(e)$ 称为边 e 的权数。

由于优美图在编码、循环设计等方面的应用, 寻找优美图及其标号便成为图论与组合理论研究的活跃课题。又因优美图的研究仍缺乏系统和有力的理论工具, 迄今只能对某些特殊图类来探索其优美性。

文 [1] 考查了点集 V 的分划与优美性的联系, 下面我们来构造 V 分划为二部的一种图, 并探讨它的优美性。

定义2 设 $G = (V, E)$ 是简单图, 且

(1) $V = V_1 \cup V_2$, 其中 $|V_1| = |V_2| = n$, 也设 $V_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V_2 = \{u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1\}$ 。

(2) $\forall v_i, v_j \in V$ (下标 i, j 为它们在 V_1 或 V_2 中的下标), $e = v_i v_j \in E$ 当且仅当 $|i - j| = k$, 这里 k 为非负整数。则称 G 是 k -桥梁图, 记为 $Q(2n; k)$ 。例当 $k=1$, $n \geq 3$ 时, 如图1所示。

易知, $Q(2n; 0) = \dot{\bigcup}_1^n K_2$, 当 $n=2k$ 时, $Q(2n; k) = \dot{\bigcup}_1^k C_4$ 。而当 $n < 2k$ 时, 恰有 $2k-n$ 对孤立点。若 $n = mk + t$, $m \geq 2$, $k > 0$, $1 \leq t < k$, 则 $Q(2n; k) = (\dot{\bigcup}_1^t Q(2(m+1); k))$ 。

本文于1992年11月12日收到

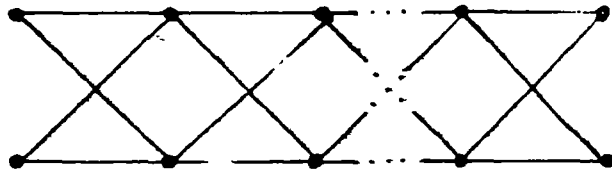


图 1

1)) $\cup (\bigcup_{i=1}^{k-t} Q(2m; 1))$, 即 $Q(2n; k)$ 恰有 k 个支, 其中有 t 个 $Q(2(m+1); 1)$, 有 $k-t$ 个 $Q(2m; 1)$, 而且每个支都是双图。

显见, $Q(2n; 0)$ 是优美图, 当且仅当 $n=1$; $n < 2k$ 时, $Q(2n; k)$ 非优美图。对其他情形, 我们有如下结果。

定理 当 $n \geq 3k$ 时, $Q(2n; k)$ 是优美图。

证明 设 $n = mk + t$ ($m \geq 3$), 它的 k 个分支编号依次为 $1, 2, \dots, k$, 其中前 t 个设为 $Q(2(m+1); 1)$, 后 $k-t$ 个设为 $Q(2m; 1)$, 而第 i 个支的顶点分别如图 2 所示:

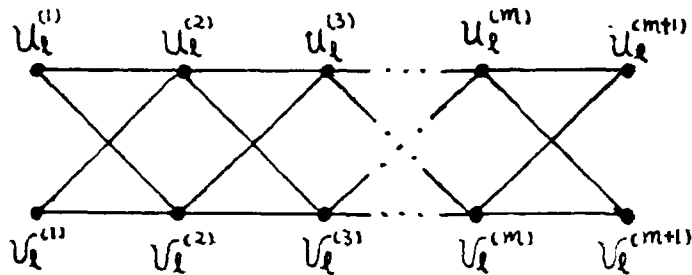


图 2

当 $1 \leq i \leq t$ 时, $l = m + 1$; 当 $t < i \leq k$ 时, $l = m$ 。

易知 $|E| = 4(mk - k + t)$, 而 $|V| = 2(mk + t)$ 。设 $f(v)$ 为标号函数, $f(v) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ 其中

(1) 当 m 为奇数时, (标号法非唯一)

$$f(u_i^{(1)}) = \begin{cases} |E| - S + 1, & S \text{ 为奇数} \\ 3S - 6, & S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m+1)$$

$$f(v_i^{(1)}) = \begin{cases} |E| - S, & S \text{ 为奇数} \\ 3S - 2, & S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m)$$

$$f(v_{m+1}^{(1)}) = 3(m+1) - 4 = 3m - 1$$

若 $V_{\alpha}^{a-1}, V_{\alpha+1}^{a-1}$ ($2 \leq i \leq t$) 已分别标号 $f(V_{\alpha}^{a-1}), f(V_{\alpha+1}^{a-1})$, 则

$$f(u_i^{(a)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha}^{a-1}) - S - 1, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha+1}^{a-1}) + 3S - 7, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m+1)$$

$$f(v_i^{(a)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha}^{a-1}) - S - 2, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha+1}^{a-1}) + 3S - 3, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m)$$

$$f(V_{\alpha+1}^{(a)}) = f(V_{\alpha+1}^{a-1}) + 3m - 2$$

又若 $V_{\alpha}^{(a)}, V_{\alpha+1}^{(a)}$ 已分别标号 $f(V_{\alpha}^{(a)}), f(V_{\alpha+1}^{(a)})$ 则

$$f(u_i^{(a+b)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha}^{(a)}) - S - 1, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha+1}^{(a)}) + 3S - 7, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$f(v_i^{(a+b)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha}^{(a)}) - S - 2, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha+1}^{(a)}) + 3S - 3, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m)$$

若 $V_{\alpha-1}^{a-1}, V_{\alpha}^{a-1}$ ($t+2 \leq i \leq k$) 已分别标号 $f(V_{\alpha-1}^{a-1}), f(V_{\alpha}^{a-1})$, 则

$$f(u_i^{(a)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha-1}^{a-1}) - S - 1, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha}^{a-1}) + 3S - 7, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$f(v_i^{(a)}) = \begin{cases} f(V_{\alpha-1}^{a-1}) - S - 2, S \text{ 为奇数} \\ f(V_{\alpha}^{a-1}) + 3S - 3, S \text{ 为偶数} \end{cases}$$

$$(S=1, 2, \dots, m)$$

(2) 当 m 为偶数时, 标号方法完全类似。

可以证明以上标号满足优美图定义。事实上 (这里仅对 m 为奇数讨论), 由于 $V_s^{(a)}, u_s^{(a)}$ ($i=1, 2, \dots, k, s=1, 2, \dots, m$ (或 $m+1$)) 中, S 为偶数的点的最大标号为 $f(V_{\alpha-1}^{a-1}) = 3mk - 6k + 4t + 1$, 而 S 为奇数的点的最小标号为 $f(u_1^{(a)}) = |E| - (m+1)k - (k-1) + 1 = 3mk - 6k + 4t + 2$, 故由标号法知, 所有点的标号互不相同。

设 A 为所有边的权数集, A_i 表示第 i 个支中边的权数集 ($i=1, 2, \dots, k$), 显然 A_i 中各数互不相同, 而且

$$\min A_i = \begin{cases} f(V_{\alpha}^{(a)}) - f(V_{\alpha+1}^{(a)}) & 1 \leq i \leq t \\ f(V_{\alpha}^{(a)}) - f(V_{\alpha-1}^{(a)}) & t+1 \leq i \leq k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\max A_{i+1} &= f(u_1^{(i+1)}) - f(u_2^{(i+1)}) \\
&= \begin{cases} (f(V_{\mathbf{m}}^{(i)}) - 2) - (f(V_{\mathbf{m}+1}^{(i)}) - 1) & 1 \leq i \leq t \\ (f(V_{\mathbf{m}}^{(i)}) - 2) - (f(V_{\mathbf{m}-1}^{(i)}) - 1) & t+1 \leq i \leq k \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(V_{\mathbf{m}}^{(i)}) - f(V_{\mathbf{m}+1}^{(i)}) - 1 & 1 \leq i \leq t \\ f(V_{\mathbf{m}}^{(i)}) - f(V_{\mathbf{m}-1}^{(i)}) - 1 & t+1 \leq i \leq k \end{cases} \\
&= \min A_i - 1
\end{aligned}$$

即 A_i 中数大于 A_{i-1} 中数, 这就说明了 A 中各数互不相同。又注意到 $\max A = |E|$, $\min A = 1$, 因此标号是优美的。 即证!

当 $n = 3k - t$ ($k \geq t$) 时 $Q(2n; k) = \bigcup_1^{t-1} Q(2 \times 3; 1) \cup \bigcup_1^t C_i$ 的优美性, 若 t 较小 (如 $t \leq 10$) 可逐个验证其是优美图, 但对一般情况仍未能找出优美性的规律。注意到, 已有人猜测, m 个 C_i 的并是优美图, 这显然是如下猜想的特款:

猜想 当 $n \geq 2k$ 时, $Q(2n; k)$ 是优美图。

最后感谢周尚超教授的帮助与指导。

参 考 文 献

- [1] K. M. Koh, D. G. Rogers, H. K. Teo and K. Y. Yap. Graceful Graphs: Some Further Results and Problems. *Congressus Numerantium*, 1980; 29: 559—571
- [2] 柳柏谦. 关于优美图的最近结果. *应用数学*, 1990; (4): 108—110

The Structure and Gracefulness of a Class of Graphs

Deng Yixiong

ABSTRACT

The essay constructs k -bridge graphs, and studies its gracefulness. The conclusion is that, if $n \geq 3k$, then k -bridge graphs, $Q(2n; k)$ is graceful.

Key words: graceful graph; k -bridge graphs