

图 G 有立方根的充要条件

徐保根

(基础课部)

摘 要

摩霍柏迪 [M18]^[1]研究得出了图 G 有平方根的充要条件,本文给出图 G 有立方根的充要条件。

关键词: 立方根, 完全图, 邻域

0 引 言

本文所指的图均为无向单图。对于任意一个图 H , 在 H 中如果再将距离不超过 n 的任何两点都邻接起来, 则所得到的图称为 H 的 n 次方幂 H^n 。对于给定的图 G , 如果存在图 H , 使得 $G=H^3$, 则称图 G 有立方根 H 。在本文中, 如果 G_1 和 G_2 是两个完全图, 则记联 G_1+G_2 也表示一个完全图; 其顶点集 $V(G_1+G_2)=\{v_i|v_i\in G_1 \text{ 或 } v_i\in G_2\}$ 。

1 定理及其证明

命题 图 G 有立方根, 当且仅当 G 的各个分支均有立方根。

上述命题是显然的。

定理 一个 P 阶图 G 有立方根的充要条件是: G 有 P 个完全子图 G_i , 使得满足条件:

- (1) $v_i\in G_i$,
- (2) $v_i\in G_j$ 当且仅当 $v_i\in G_i$, 此时 $G_i+G_j\subseteq G$,
- (3) 对于 G 中每一边 x , 存在 G_s 和 G_t , 使得: $v_s\in G_s$, 且 $x\in G_s+G_t$ 。

证明 由上述命题, 不妨设 G 是连通图。

①先证必要性。

若图 G 有立方根 H , 即 $G=H^3$, 显然 H 也是连通图, 且 $V(G)=V(H)=\{v_i|i=1,2,\dots,p\}$ 。取 G_i 为 v_i 在 H 中的闭邻域中的全部点构成的完全图。显然 G_i 是 $d_H(v_i)+1$ 阶完全图。可见, G_i 中任何两点在 H 中的距离不超过 2, 而 $G=H^3$, 所以, $G_i\subseteq G(i=1,2,3,\dots,p)$ 。下面验证 G_i 满足定理中条件(1), (2) 和(3)。

本文于 1992 年 8 月 25 日收到

(1) $v_i \in G_i$ 是显然的。

(2) 由 G_i 的定义, $v_i \in G_i$ 当且仅当 v_i 与 v_j 在 H 中邻接。也即, $v_j \in G_i$ 。此时, G_i 中任意一点与 G_i 中任意一点在 H 中的距离不超过 3, 如图 1 所示。从而它们在 G 中是邻接的, 也即 $G_i + G_j \subseteq G$, 这表明 $G_i + G_j$ 也是 G 的完全子图。

(3) 对于 G 中每一边 x , 记 $x = v_m v_n$, 由于 $G = H^3$, 故 v_m 与 v_n 在 H 中的距离 $d_H(v_m, v_n) \leq 3$ 。

(a) 若 $d_H(v_m, v_n) = 1$, 即 v_m 与 v_n 在 H 中邻接, 取 $G_i = G_m, G_j = G_n$, 显然 $v_i \in G_i$, 且 $x \in G_i + G_j$, 其中: $s = m, t = n$ 。

(b) 若 $d_H(v_m, v_n) = 2$, 即 v_m 与 v_n 在 H 中至少有一个公共邻点 v_i , 从而 v_m 与 v_n 均在 G_i 中。令: $m = i, n = i$, 即有 $x = v_m v_n \in G_i \subseteq G_i + G_i$, 其中, 仍有 $v_i \in G_i$, 当然 $v_i \in G_i$ 。

(c) 若 $d_H(v_m, v_n) = 3$, 则在 H 中存在一条长为 3 的道路 $v_m - v_i - v_j - v_n$, 可见, $v_m \in G_i, v_n \in G_j$, 从而 $x = v_m v_n \in G_i + G_j$, 而 v_i 与 v_j 在 H 中相邻, 故 $v_i \in G_i$, 当然也有 $v_j \in G_j$ 。

综合上述, 我们构造的 G 的完全子图 G_i 满足条件(1)、(2)和(3)。从而证明了必要性。

② 现在来证明定理的充分性。

若 G 有 P 个完全子图 G_i 满足条件(1)、(2)和(3), 则可以如下构造 H , 使得 $G = H^3$ 。

取 H 的顶点同于 G 的顶点, 即 $V(H) = V(G)$, 令 v_i 与 v_j 在 H 中邻接, 当且仅当 $v_i \in G_i$, 这样构造的图 H , 具有如下特征。

(a) $H \subseteq G$

由于, $V(G) = V(H)$ 。对于 H 中任意一边 $x = v_i v_j$, 由 H 的构造, $v_i \in G_i, G_j$ 是 G 的完全子图, 从而 $x = v_i v_j \in G_i \subseteq G$, 即 $H \subseteq G$ 。

(b) H 中距离为 2 的任意两点 v_i 和 v_j , 它们在 G 中是邻接的。

事实上, H 中有一条长为 2 的道路连接 v_i 和 v_j , 即 $v_i - v_s - v_j$, 由 H 的构造, v_i 和 v_j 均属于 G_s , 而 G_s 是 G 的完全子图, 故 v_i 与 v_j 在 G_s 中邻接, 故也在 G 中邻接。

(c) H 中距离为 3 的任何两点 v_i 和 v_j , 它们在 G 中也是邻接的。

事实上, 由于 H 中有一条长为 3 的道路连接 v_i 和 v_j , 即记为 $v_i - v_m - v_n - v_j$ 。由 H 的构造可知 $v_i \in G_m, v_j \in G_n$, 从而 v_i 和 v_j 均属于 $G_m + G_n$, 又因为 v_m 和 v_n 在 H 中邻接, 由 H 的构造, $v_m \in G_s$, 再由定理中条件(2)知: $v_n \in G_s$, 且 $G_m + G_n \subseteq G$ 。而 $G_m + G_n$ 是 G 的完全子图, v_i 与 v_j 在 $G_m + G_n$ 中邻接, 故在 G 中邻接。

(d) H 中距离大于或等于 4 的任何两点, 它们在 G 中是不邻接的。

反证: 若命题不真, 则存在两点 v_i 和 v_j , 它们在 H 中的距离 $d_H(v_i, v_j) \geq 4$, 但它们在 G 中是邻接的。如图 2 所示, 记 $x = v_i v_j$ 是 G 中的边, 由定理的条件(3), 存在 G_i 和 G_j , 使 $v_i \in G_i$, 且 $x = v_i v_j \in G_i + G_j$, 若 v_i 和 v_j 同属于 G_i (或 G_j), 则由 H 的构造, v_i 与 v_j 在 H 中有公共邻接 v_s (或 v_t), 从而 $d_H(v_i, v_j) \leq 2$, 矛盾。若 $v_i \in G_i, v_j \in G_j$, 则 v_i 与 v_j 在 H 中邻接, v_i 与 v_j 在 H 中邻接。而又因为 $v_i \in G_i$, 故 v_i 与 v_t 在 H 中邻接。即 H 中有一条长为 3 的道路连接 v_i 与 v_j , 即为如下 $v_i - v_t - v_s - v_j$, 从而 $d_H(v_i, v_j) \leq 3$, 矛盾。

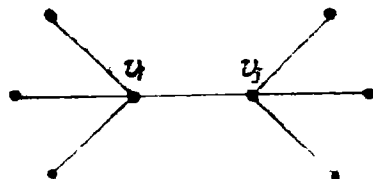


图 1

综合上述: H 中距离不超过 3 的任何两点在 G 中是邻接的; H 中距离超过 3 的任何两点在 G 中是不邻接。从而有 $G=H^3$, 证毕。

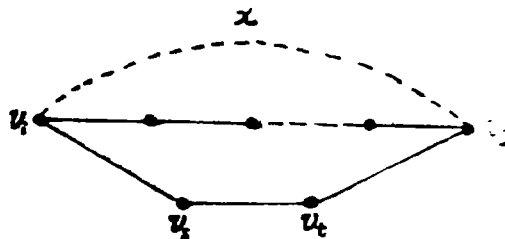


图 2

参 考 文 献

- [1] M. Mukhopadhyay. A. The square root of a graph. J. Combinatorial Theory. 1967: 290 ~295
 [2] F. 哈拉里. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980

A Necessary and Sufficient Condition for The Existence of The Cube Root of A Graph

Xu Baogen

ABSTRACT

Mukhopadhyay [M18] had given a necessary and sufficient condition for the existence of the square root of a graph. In this paper. We give a necessary and sufficient condition for the existence of the cube root.

Key words: Cube root; Complete graph; neighborhood