

关于 Moore 图的若干特征

徐 保 根

(基础课部)

摘 要

本文通过对 Moore 图的结构分析, 得出其若干重要特征, 从而找出了存在非平凡 Moore 图的必要条件。

关键词: 直径; 围长; 正则; 中心; 连通度; Moore 图

0 引 言

本文所指的图均为无向单图。如果一个连通图 G 的直径 d 和围长 g 满足: $g=2d+1$, 则称图 G 为 Moore 图, 以下简称为 M -图。对于任意大于 2 的正整数 m , 显然 K_m 为 M -图。若 m 为大于或等于 3 的奇数, C_m 也为 M -图, 我们将这两类图称为平凡 M -图。对于 M -图, Singleton [S13]^[1] 证明了其正则性, 本文主要讨论其另外一些性质特征及其非平凡 M -图存在的必要条件。

1 基本结论叙述

定理 1 若 m 阶连通图 G 为 M -图, 则有

(1) G 正则, 其正则度 K 为 $m-1$ 的因数。

(2) 对任意 $v \in V(G)$, 记 $S_i(v) = \{u \in V(G) | d(u, v) = i\}$, 则有: $|S_i(v)| = K(K-1)^{i-1}$ ($1 \leq i \leq d$)

(3) $m = \begin{cases} 2d+1 & k=2 \text{ 时;} \\ 1+k[(k-1)^d-1]/(k-2) & k \geq 3 \text{ 时;} \end{cases}$

其中: d 为 G 的直径。

由上述定理, 不难得出:

推论 1 若 m 阶连通图 G 为 M -图。

(1) 若 $m=p+1$, (p 为素数), 则 $G \cong K_m$ 。

(2) 若 $m=2p+1$, (p 为素数), 则 $G \cong K_m$ 或 C_m 。

本文于 1992 年 11 月 16 日收到

(3) 若 $m = 2^n + 1, (n \in N)$, 则 $G \cong K_m$ 或 C_m 。

(4) 若 $m = p \cdot q + 1, (p, q \text{ 为奇素数}), p > q$, 且若 $p \not\equiv q \pmod{(q-1)^2}$, 则 $G \cong K_m$ 。

(5) 若 $m = p^2 + 1, (p \text{ 为奇素数})$, 则 G 的直径 $d(G) \leq 2$ 。

上述定理及其推论指明了存在非平凡 M -图的必要条件, 从而可以判断某些阶数的非平凡 M -图的不存在性。

定理 2 若连通图 G 为 M -图, 则:

(1) G 的中心 $C(G) = V(G)$ 。

(2) G 的连通度 $u(G) = K$ (K 为 G 的正则度)。

定理 3 若连通图 G 为 M -图, 其正则度为 K , 直径为 d , 则有:

(1) G 中任意两点, 至少在一个长为 $2d + 1$ 的圈中。

(2) G 中每一点 v , 恰好在 $\left[\frac{K}{2}\right]$ 个点不相交 (除 v 本身外) 的长为 $2d + 1$ 的圈中。

(3) G 中每一点 v , 在 G 中至少有 $\left(\frac{K}{2}\right)$ 个长为 $2d + 1$ 的圈经过 v 点。

2 结论之证明

引理^[1] 若连通图 G 为 M -图, 则 G 为正则图。

定理 1 的证明:

由于 m 阶连通图 G 为 M -图, 由上述引理, 设其正则度为 K , 其直径为 d 。

对于任意 $v \in V(G)$, 令 $S_i(v) = \{u \in V(G) | d(u, v) = i\}$ 其中 $1 \leq i \leq d$ 。

当 $1 \leq i \leq d - 1$ 时, $S_i(v)$ 中任意两点是不邻的。(不然的话, 该两点连同 v 点在一个长度不超过 $2i + 1$ 的圈中^[2], 因 $i \leq d - 1$, 从而 G 的围长 $g \leq 2(d - 1) + 1 = 2d - 1$, 与 G 是 M -图矛盾)。

同样地, $S_{i-1}(v)$ 中任意一点仅与 $S_i(v)$ 中唯一的一点邻接。(不然的话, G 中存在长度不超过 $2(i + 1) \leq 2d$ 的圈, 矛盾。)

由此可见, 将图 G 除掉 $S_d(v)$ 之间的一切边得到的图 T 为一棵树。(v 点为其中心点)。

由于 G 是 K 正则图, 容易计算得:

$$|S_i(v)| = K(K-1)^{i-1} \quad (1 \leq i \leq d)$$

$$m = \sum_{i=1}^d |S_i(v)| + 1 = \begin{cases} 2d+1 & (K=2 \text{ 时}) \\ 1+K[(K-1)^d-1]/(K-2) & K \geq 3 \text{ 时} \end{cases}$$

并从上式不难看出, K 为 $m - 1$ 的因数。

定理 1 证毕。

定理 2 的证明:

由定理 1 $|S_d(v)| = K(K-1)^{d-1} \neq 0$, 故由 v 的任意性得知, G 的中心 $C(G) = V(G)$ 。

对于 G 中任意两点 u 和 v , G 中除掉 $S_d(v)$ 之间的一切边得到一棵树 T , $T - v$ 恰有 K 个分支, 在 G 中, $S_d(v)$ 中任意一点在各分支中均恰有一个邻点. 因此, G 中存在 K 条点不相交(除端点外)的路径连通 u 点和 v 点, 而 G 为 K 度正则图. 所以, G 的连通度 $\kappa(G) = K$. 证毕.

定理 3 的证明:

由上述定理 1 和 2 的证明中可以看出定理 3 是显然的.

参 考 文 献

- [1] Singleton[S13]. There is no irregular Moore graph. Amer. Math. Monthly. 1968(75):42~43.
[2] F. 哈拉里. 图论. 上海:上海科技出版社, 1980:27~30

On Several Characterizations of Moore Graph

Xu Baogen

ABSTRACT

This paper obtains its several important characterizations by analyzing the structure of Moore graph. (see the theorem 1-3). and find out the necessary condition of the existance of the non-trivial Moore graph.

Key Words: diameter; girth; regular; center; connectivity; Moore graph