

图论在分拆理论中的应用

周学松

(基础课部)

摘 要

本文利用图论的方法,解决了任何正整数 n 满足如下条件:

分部数 $=v$

最大分部量 $=u$

取 $(R_1 > v, \frac{u}{R_1} = L > v)$ $S_j = \{(j-1)R_1 + 1, (j-1)R_1 + 2, \dots, jR_1\}$ ($j = 1, 2, \dots, L$) $n_i \in S_j$ $j = 1, 2, \dots, L$ $n_1 < n_2 < \dots < n_v$

且 $i \neq i'$ 则 $S_i \neq S_{i'}$ 的分拆问题。

关键词: 分拆; 有向图; 有向图矩阵; 网络

0 引 言

众所周知,分拆非常有用,是解决某些匹配问题的好工具,然而,它的求解并非易事。参考文献[1]中对正整数 n 的具有两个限制条件的分拆问题作了较为详细的论述。本文讨论了一类具有三个限制条件的无序分拆问题。即对任一正整数 n , 当限制条件为:

分部数 $=v$

最大分部量 $=u$

各分部量 $n_i \in S_i$, $i = 1, 2, \dots, L$, $n_1 < n_2 < \dots < n_v$,

其中: $L = \frac{u}{R_1}$, $S_j = \{(j-1)R_1 + 1, (j-1)R_1 + 2, \dots, jR_1\}$ 。

(R_1 为大于 V 的某个正整数)

且 $i \neq i'$ 时有 $S_i \neq S_{i'}$ 的分拆问题。

1 预备知识

定义1 极是一个全不连通的图,记为 G 。 $|G|$ 记 G 中元素的个数。

定义2 极 G_1 与极 G_2 的有向图 $G_1 G_2$ 是一个由 G_1 中的点为尾, G_2 中的点为头的完全双

本文于1992年11月20日收到

图。

如 G_1 ($|G_1|=2$) 与 G_2 ($|G_2|=3$) 或 G_2 与 G_1 的有向图 G_1G_2 , G_2G_1 分别为:

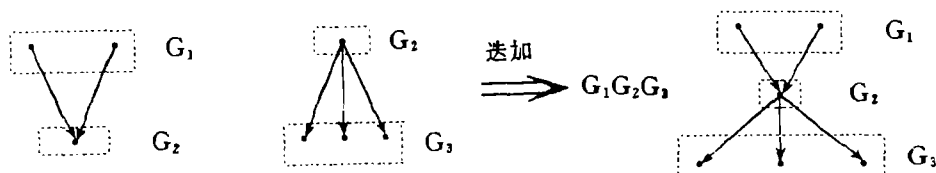


定义3 n 个极 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的有向图 $D=G_1G_2\cdots G_n$ 为

$$V(D) = \bigcup_{i=1}^n V(G_i), \quad V(G_i) = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iR_i}\} \\ i = 1, 2, \dots, n$$

$$A(D) = \{(v_{ij}, v_{i+1, l}) | v_{ij} \in V(G_i), v_{i+1, l} \in V(G_{i+1})\}$$

如 G_1 ($|G_1|=2$), G_2 ($|G_2|=1$) 和 G_3 ($|G_3|=3$) 的有向图 $G_1G_2G_3$:



由以上定义, 可将上述的分拆问题转换为如下说法:

取 L 个极 $G_i = \{(i-1)R_1 + 1, (i-1)R_1 + 2, \dots, iR_1\}$ ($i = 1, 2, \dots, L$), 由此可得 C_L^v 个具有 v 个极的有向图, 每个有向图中每条弧赋以一个权, 该权为该弧的起点对应的正整数。但最后两个极间的弧的权为该弧的起点与终点对应的正整数之和。因此, 任一正整数 n 对应于所给条件的分拆数问题就归结为以上 C_L^v 个具有 v 个极的所有有向图中道路长度为 n 的条数是多少的问题。

定义4 极 G_1 ($|G_1|=m_1$) 和极 G_2 ($|G_2|=m_2$) 的有向图矩阵为:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, j-1 \\ 1, & j \leq i \leq m_2 + j - 1 \\ 0, & i = m_2 + j, \dots, m_2 + m_1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, m_1)$$

即

$$m_2 \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 1 \end{array} \right\} = A_{(1,1)} = A$$

m_1

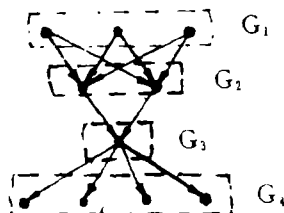
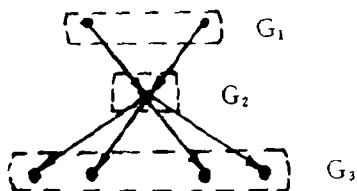
定义 5 具有 n 个极的有向图 $G_1 G_2 \cdots G_n$ 的有向图矩阵为:

$$A_{(1,n)} = \begin{bmatrix} A_{(1,2)} & & & \\ & A_{(2,3)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{(n-1,n)} \end{bmatrix}$$

定义 6 是有无穷个极的有向图 $G_1 G_2 \cdots G_n \cdots$ 的有向图矩阵为:

$$A_{(1,+\infty)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{(1,n)} = \begin{bmatrix} A_{(1,2)} & & & \\ & A_{(2,3)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{(n-1,n)} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

如下两个有向图;



它们的有向图矩阵分别为:

$$A_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{(1,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 主要结果

引理: 在 $A_{(1,+\infty)}^k$ 中等式:

$$a_{y,i+j}^k = a_{y-i,j}^k \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

成立。

定理: 若将 $0 \sim +\infty$ 中所有正整数按序构成具有无穷个极 $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ ($\forall i, |G_i| = R_i$) 的有向图, 则该有向图的有向图矩阵 $A_{(1,+\infty)}$ 的 v 次幂 $A_{(1,+\infty)}^v$ 中第 y 行第 $R_i j + 1$ (j 为非负整数) 列处的元 $a_{y, R_i j + 1}^v$ 是由满足条件:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_v = \sum_{i=1}^v i = j \quad (1)$$

(其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_v$, $1 \leq p_i \leq L$, L 为大于 v 的某个正整数) 的 v 个极 $G_{p_1}, G_{p_2}, \dots, G_{p_v}$ 构成的有向图中, 一端的端点到另一端的端点间具有长度为:

$$\sum_{i=1}^{v-1} (iR_i + 1) + y + 1 = M_v + y \quad (M_v = \sum_{i=1}^{v-1} (iR_i + 1) + 1)$$

的道路的条数。

推论: 满足引言中所给条件的任一正整数 n 的分拆数 $p^{(n)}$ 为:

$$p^{(n)} = \begin{cases} 0, & n \geq \sum_{i=R_1}^{+\infty} i \quad \text{或} \quad n \leq \sum_{i=1}^v i \\ \sum_{j \geq 0} a_{i, R_i j + 1}^v Z_j(p_1, p_2, \dots, p_v) = \sum_{j \geq 0} a_{i-R_i j}^v Z_j(p_1, p_2, \dots, p_v), & n = M_v + i \end{cases}$$

其中 $Z_j(p_1, p_2, \dots, p_v)$ 是满足条件 (1) 的组合 $P_1 P_2 \dots P_v$ 的个数。

3 定理的证明

首先证明引理。

证：对 K 用归纳法证。

$K=1$ 时，结论显然成立。

假设 $K=b$ 时，结论成立。

即 $a_{y,i+j}^b = a_{y-i,j}^b$ ($\forall i \geq 0$)。

下面证明 $K=b+1$ 时结论也成立。

$$\because a_{y,i+j}^{b+1} = a_{y,i+j}^b + a_{y,i+1+j}^b + \cdots + a_{y,i+K_1-1+j}^b$$

$$(\text{归纳假设}) = a_{y-i,j}^b + a_{y-i,j+1}^b + \cdots + a_{y-i,j+(K_1-1)}^b = a_{y-i,j}^{b+1}$$

$\therefore$ 结论成立。

定理的证明：

对 v 用数学归纳法来证。

$v=2$ 时，先对 $A_{(1,+\infty)}^2$ 中的第一列上的元素 $a_{1,1}^2$ 行归纳法。

$y=1$ 时， $a_{1,1}^2=1$ 它恰好表示极 G_1, G_2 组成的有向图中，道路长度最短的条数是 1，结论成立。

假设 $y=T$ 时结论成立。

即 $a_{1,1}^2$ 表示道路长度为 M_2+T 的条数为 T 。

如果定义 $f(x, y)$ 为长度是 $x+y$ 的道路，则在极 G_1, G_2 组成的有向网络中的 T 条长度为 M_2+T 的道路只能是：

$$f(1, M_2 + T - 1), f(2, M_2 + T - 2), \cdots, f(T, M_2)$$

显然，在极 G_1, G_2 组成的有向网络中，道路长度为 M_2+T+1 的道路也只能是：

$$f(1, M_2 + T), f(2, M_2 + T - 1), \cdots, f(T, M_2 + 1), f(T + 1, M_2)$$

这 $T+1$ 条。

而 $a_{1+1,1}^2$ 恰好等于 $T+1$ 。

于是当 $y=T+1$ 时结论也成立。

同理可证第 $3i$ 列 ($i=1, 2, \cdots$) 上的元素也具有这种性质。

故 $v=2$ 时结论成立。

假设 $v=m$ 时结论成立。

即 $A_{(1,+\infty)}^m$ 中元 a_{1,M_1+1}^m 是由满足条件 (1) 的 v 个极 $G_{p_1}, G_{p_2}, \cdots, G_{p_v}$ 构成的有向网络中，一端端点到另一端端点具有长度为 M_m+y 的道路的条数。

下面证明 $v=m+1$ 时结论也成立。

首先还是来看 $A_{(1,+\infty)}^{m+1}$ 中第一列上的元 $a_{y,1}^{m+1}$ 。

一方面有:

$$a_{y,1}^{m+1} = a_{y,1}^m + a_{y,2}^m + \cdots + a_{y,R_1}^m \quad (2)$$

另一方面, $m+1$ 个极 $G_1 G_2 \cdots G_{m+1}$ 的有向图是由前 m 个极 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 的有向图的基础上再迭加一个极 G_{m+1} 而得到的。也就是说, 再迭加 R_1 个点: $v_1 = mR_1 + 1, v_2 = mR_1 + 2, \cdots, v_{R_1} = mR_1 + R_1$ 而得到的。所以, 其道路长度为 $M_{m+1} + y$ 的条数应为下列诸情况之和:

数 v_1 单独作为一个极, 迭加到前 m 个极的有向图中得一新的网络, 该网络中道路长度为 $M_{m+1} + y$ 的条数等于前 m 个极 $G_1, G_2, \cdots, G_m$ 的网络中道路长度为 $M_{m+1} + y - v_1 = \sum_{i=1}^m (iR_1 + 1) + 1 + y - (mR_1 + 1) = M_m + y$ 的条数, 由归纳假设知, 它就是 $a_{y,1}^m$ 。

数 v_2 单独作为一个极, 迭加到前 m 个极的有向图中得一新的网络, 该网络中道路长度为 $M_{m+1} + y$ 的条数等于前 m 个极的网络中道路长度为 $M_{m+1} + y - v_2 = \sum_{i=1}^m (iR_1 + 1) + 1 + y - (mR_1 + 2) = M_m + (y - 1)$ 的条数, 由归纳假设知, 它就是 $a_{y-1,1}^m$ 。

依此下去, 数 v_{R_1} 单独作为一个极并到前 m 个极得一新的网络, 该网络中道路长度为 $M_{m+1} + y$ 的条数就是前 m 个极的网络中道路长度为 $M_{m+1} + y - v_{R_1} = \sum_{i=1}^m (iR_1 + 1) + 1 + y - (mR_1 + R_1) = M_m + (y - R_1 + 1)$ 的条数, 由归纳假设知, 它就是 $a_{y-R_1+1,1}^m$ 。

所以, 由 $m+1$ 个极 $G_1, G_2, \cdots, G_{m+1}$ 组成网络中道路长度为 $M_{m+1} + y$ 的条数为:

$$a_{y,1}^m + a_{y-1,1}^m + \cdots + a_{y-R_1+1,1}^m = a_{y,1}^m + a_{y,2}^m + \cdots + a_{y,R_1}^m \quad (3)$$

由 (2) (3) 立即得证 $v=m+1$ 时结论确实成立。

同理可证 $A_{(1,+\infty)}^*$ 中第 $jR_1 + 1$ 列上的元也具有完全相同的性质。

4 应 用

求 $n=36$ 满足如下条件的分拆数 $p^{(36)}$:

(1) 分部数=3

(2) 最大分部量=24

(3) 分部量 n_1, n_2, n_3 满足 $n_1 < n_2 < n_3, n_j \in S_j$ (其中 $S_j = \{(j-1)6+1, (j-1)6+2, \cdots, 6j\}$) $j=1, 2, 3, 4$ 且 $j' \neq j$ 则 $S_{j'} \neq S_j$ 。

将 $0 \sim +\infty$ 中所有正整数作无穷多个极 $G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots$ ($\forall i=1, 2, \cdots, |G_i|=6$), 则这无穷多个极构成的有向图矩阵 $A_{(1,+\infty)}$ 的 3 次幂为:

$$A_{(1,+\infty)}^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 3 & 1 & & & & & & & \\ 6 & 3 & & & & & & & \\ 10 & 6 & \cdot & & & & & & \\ 15 & 10 & \cdot & \cdot & & & & & \\ 21 & 15 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 25 & 21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & & \\ 27 & 25 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 3 & \cdot & \\ 27 & 27 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 6 & \cdot & \cdot \\ 25 & 27 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 10 & \cdot & \cdot \\ 21 & 25 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 15 & \cdot & \cdot \\ 15 & 21 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 21 & \cdot & \cdot \\ 10 & 15 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 25 & \cdot & \cdot \\ 6 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 27 & \cdot & \cdot \\ 3 & 6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 27 & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 25 & \cdot & \cdot \\ & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 21 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 15 & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & 10 & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & 6 & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 1 & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\because n=36=21+15=\left[\sum_{i=1}^{3-1}(6i+1)+1\right]+15=M_3+15$$

$\therefore$ 推论中 $i=15$

由此得:

$$\begin{aligned} p^{(36)} &= \sum_{j \geq 0} a_{15-j,1}^3 \cdot Z_j(p_1, p_2, p_3) \\ &= a_{15,1}^3 + a_{9,1}^3 + a_{3,1}^3 = 3 + 27 + 6 = 36(\text{个}) \end{aligned}$$

$$(\text{此时 } Z_0(1, 2, 3) = Z_1(1, 2, 4) = Z_2(1, 3, 4) = Z_3(2, 3, 4) = 1)$$

5 结 束 语

对于 $R_1=v$ 的情况, 按定理证明中的手法, 也可求其分拆数。

当 u/R_1 不能整除时, 即 $u/R_1=L+R$, 此时, 只须把前 R 个元: $1, 2, \dots, R$ 中每一个元 i 单独作为一个极并到后 L 个极构成的网络中得的新的网络算出其分拆数, 再把这 R 种情况相加即可。

作者对张忠辅教授来我校讲学时给予的有益启示深表感谢。

参 考 文 献

- (1) 柯召, 魏万迪. 组合论 (上册). 北京: 科学出版社, 1981
 (2) F. 哈拉里著, 李慰萱译. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1981

The Application of the Method of Graph in Combinatorial Theory

Zhou Xuesong

ABSTRACT

In this paper, we use the method of Graph to resolve the Problem:

For any integer $n > 0$, if

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r \quad (I)$$

$$\max \{n_1, n_2, \cdots, n_r\} = u \quad (u > v) \quad (II)$$

$$n_i \in S_i, i = 1, 2, \cdots, L \quad n_1 < n_2 < \cdots < n_r \quad (III)$$

Where $S_i = \{ (i-1)R_1 + 1, (i-1)R_1 + 2, \cdots, (i-1)R_1 + R_1 \}$, $R_1 > v$ some

integer, and $\frac{u}{R_1} = L > v \quad i \neq i', \quad S_i \neq S_{i'}$

how many Combination $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ which satisfying conditions (I) (II) (III) n has?

Key words: Partition; digraph; digraph matrix; network