

复合材料交界面上接触应力的计算

雷晓燕

(建筑工程系)

摘 要

工程中有许多不同材料组成的结构。对这类复合结构,正确计算材料交界面上的接触应力是非常重要的。通常的位移有限元法得到的应力是不连续且欠准确的。本文提出了一种新的用于不同材料交界面处的接触单元。应用虚位移原理和结合考虑材料交界面上的约束条件,文章建立了接触单元的刚度矩阵和等效荷载向量。该单元具有算法简单,程序容易实现的优点。计算实例证实了该单元的实用性和可靠性。
关键词:接触应力;接触单元;有限元法

0 引 言

近几十年来,随着生产的需要和材料科学的发展,工程中已越来越多使用两种或两种以上不同性能的材料组成的结构。对这种非均匀的复合材料,正确计算材料交界面上的接触应力对结构分析和设计是十分重要的^[1~4]。为了保证有足够的粘接强度,交界面上的接触应力不应超过材料间的允许粘接强度,否则将会引起裂缝,导致应力和位移的重分布。

对这种由不同材料组成的结构,工程上一般用有限元法进行分析和计算,考虑各种材料的非均匀性。但在位移有限元法中,位移是基本未知量,位移在单元间是连续的。单元应力是从位移和本构方程得到的。当结构是由几种材料复合而成时,交界面间的应力是不连续的。如果不同材料的性质相差很大时,这种情况尤其严重,这与实际情况是相违背的。

为了获得复合材料内的正确应力分布情况,本文提出了一种接触单元。这种单元以节点位移和接触应力作为基本未知量,当与位移有限元联接时,接触应力是作为附加的未知量。该方法的优点是普通的有限元一样,建立了接触面上的单元刚度矩阵和等效荷载向量,从而在数值计算时可按常规的有限元集成方法形成总刚度矩阵和总荷载向量。同时以接触应力作为基本未知量提高了应力的计算精度。

本文于1993年6月23日收到

1 接触单元理论

考察由 A、B 两种不同材料组成的结构, 如图 1 所示。当用有限元法分析该复合结构时, 对 A、B 部分采用普通的有限单元, 对 A、B 的粘接部分则采用文中提出的接触单元。

定义接触单元如图 2, 运用虚位移原理, 得到

$$\delta \underline{a}^T \underline{F} = \int_r (\delta \underline{A})^T \underline{\Sigma} d\Gamma \quad (1)$$

其中 $\underline{a}$ 和 $\underline{F}$ 分别为整体坐标系中的节点位移矢量和等效节点力矢量

$$\underline{a} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_6, v_6\}^T$$

$$\underline{F} = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, \dots, F_{x6}, F_{y6}\}^T$$

$\underline{A}$ 和 $\underline{\Sigma}$ 分别为局部坐标系中的相对位移矢量及接触应力矢量

$$\underline{A} = \{\Delta u', \Delta v'\}^T$$

$$\underline{\Sigma} = \{\sigma, \tau\}^T$$

引入插值函数矩阵 $\underline{N}$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中: $N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$

$$N_2 = 1 - \xi^2$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

单元内任一点的相对位移可用节点相对位移表示为

$$\underline{A} = \underline{N} \Delta \underline{a}' \quad (3)$$

其中 $\Delta \underline{a}'$ 为局部坐标系中的节点相对位移矢量

$$\Delta \underline{a}' = \{\Delta u'_1, \Delta v'_1, \Delta u'_2, \Delta v'_2, \Delta u'_3, \Delta v'_3\}^T$$

单元内任一点的接触应力可用节点接触应力表

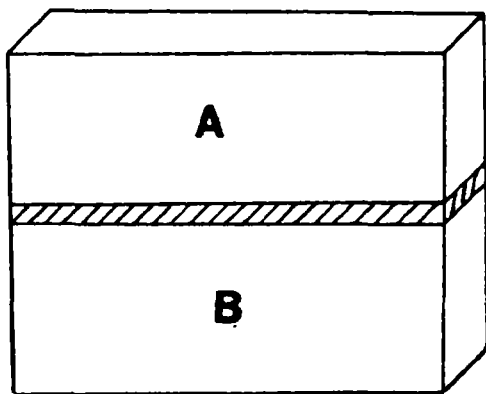


图 1 两种不同材料组成的结构

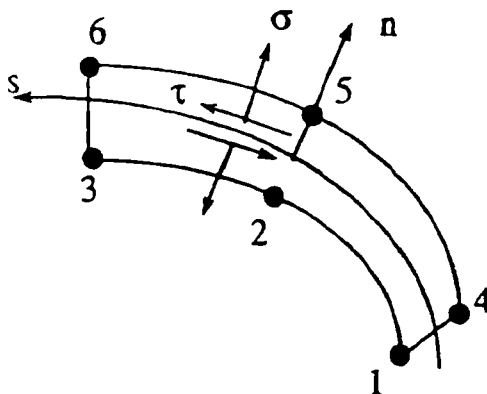


图 2 接触单元

示为

$$\underline{\Sigma} = \underline{N} \underline{\sigma} \quad (4)$$

其中 $\underline{\sigma}$ 为局部坐标系中节点接触应力矢量

$$\underline{\sigma} = \{\sigma_1 \tau_1 \sigma_2 \tau_2 \sigma_3 \tau_3\}^T$$

上式中, σ_i , τ_i 分别为局部坐标系中 i 节点沿法线方向 n 和切线方向 S 的节点接触应力。

局部坐标系中节点相对位移与整体坐标系中节点位移之间的关系为

$$\underline{\Delta a}' = \underline{C} \underline{a} \quad (5)$$

其中 $\underline{C}$ 为坐标转换矩阵

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -\underline{L}_1 & 0 & 0 & \underline{L}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{L}_2 & 0 & 0 & \underline{L}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{L}_3 & 0 & 0 & \underline{L}_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

上式中

$$\underline{L}_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

φ_i 为整体坐标系 x 与局部坐标系 n 之间的夹角。

将 (3)、(4)、(5) 三式代入 (1) 中, 得到

$$\underline{C}^T \underline{S} \underline{\sigma} = \underline{F} \quad (8)$$

其中

$$\underline{S} = \int_r \underline{N}^T \underline{N} d\Gamma \quad (9)$$

对接触单元, 还须考虑单元约束条件。在局部坐标系中, 接触单元的约束条件为

$$\underline{\Delta a}' = \underline{C} \underline{a} = 0 \quad (10)$$

(8)、(10) 两式在形式上可合写成

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{C}^T \underline{S} \\ \underline{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

通过形成如下所示的刚度—约束矩阵 $\underline{K}_c$ 和荷载矢量 $\underline{f}_c$, 这种单元可以在单元水平上进行刚度和荷载的组装

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & C^T S \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\underline{f}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

(12), (13) 两式分别被称为等效单元刚度—约束矩阵和等效荷载向量, 可用标准的有限元集成规则迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

在接触单元中, 基本未知量是节点位移分量和接触应力。因此, 解有限元方程后, 直接得到节点位移和接触应力, 提高了计算接触应力的精度。

2 算例

对上述理论, 作者编制了计算程序。为了验证理论的有效性和正确性, 本文给出了二个计算实例, 并与理论解和常规有限元解进行了比较。

算例 1: 受均匀内压作用的复合圆盘

图 3 为由两种材料组成的受均匀内压作用的复合圆盘, 两种不同材料的弹性模量之比为 100 : 1, 其材料参数、几何尺寸及有限元网格均示意在图 3 中。

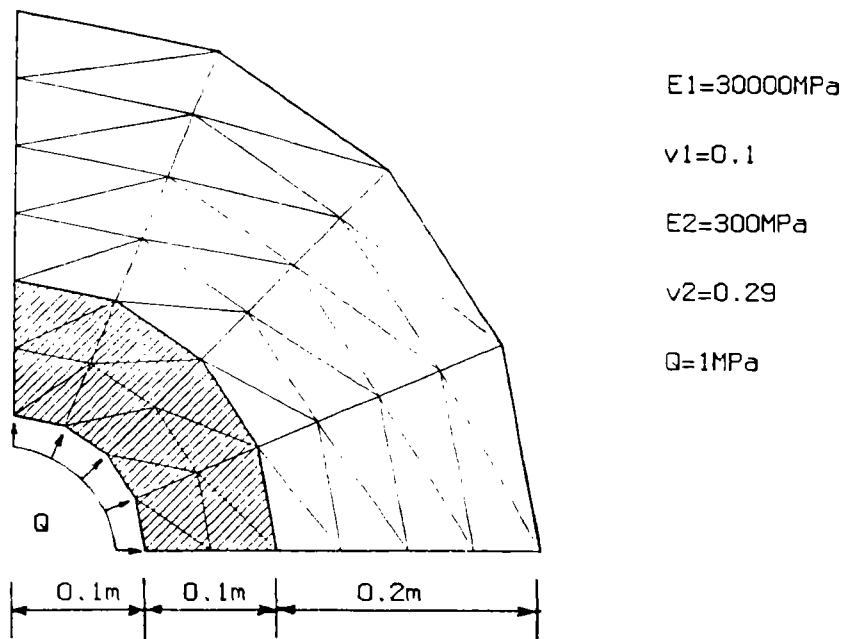


图 3 受均匀内压作用的复合圆盘

有限元网格将复合圆盘的内外区域分别离散成 16 个和 32 个三角形六节点单元，将两种不同材料的交界面离散成 4 个接触单元。

图 4 为单元网格变形图。

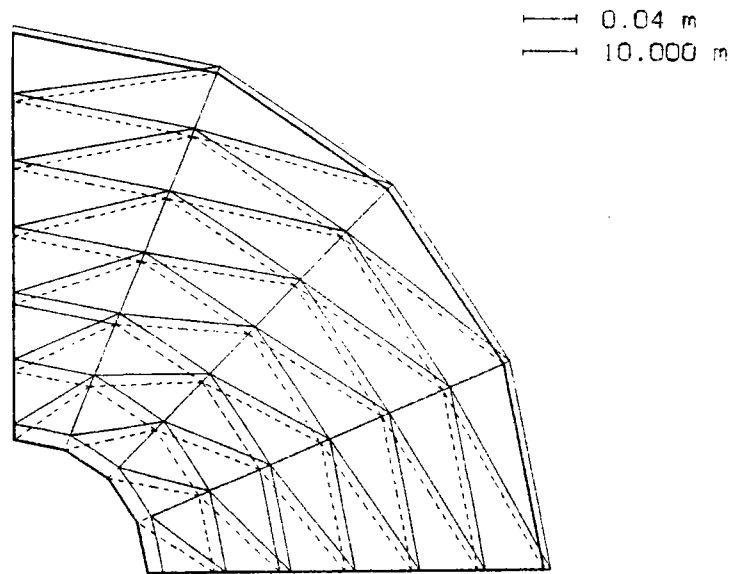


图 4 网格变形图

圆盘内各点的应力和位移及与解析解和位移有限元计算结果的对比见表 1。从表中可见，本文的方法与解析解吻合良好，位移有限元法则相差较大，其中径向应力在两种材料的交界面上是不连续的，这与实际情况不符。

表 1 复合圆盘计算结果

应 力 或 位 移 \ 计 算 方 法	解 析 解	本 文 解	位 移 有 限 元 解
σ_r^1 (KN/m ²)	-3.37	-3.57	-21.70
σ_r^2 (KN/m ²)	-3.37	-3.57	-3.43
σ_θ^1 (KN/m ²)	661.0	669.3	669.8
σ_θ^2 (KN/m ²)	5.60	6.10	6.14
$u_{r=0.2}$ (m)	0.00441	0.00431	0.00433
$u_{r=0.4}$ (m)	0.00301	0.00275	0.00276

算例 2：受均布荷载作用楔形体的弯曲

考虑如图 5 所示的受均布荷载作用楔形体的弯曲。其中 AB 为两种材料的交界面，计算中

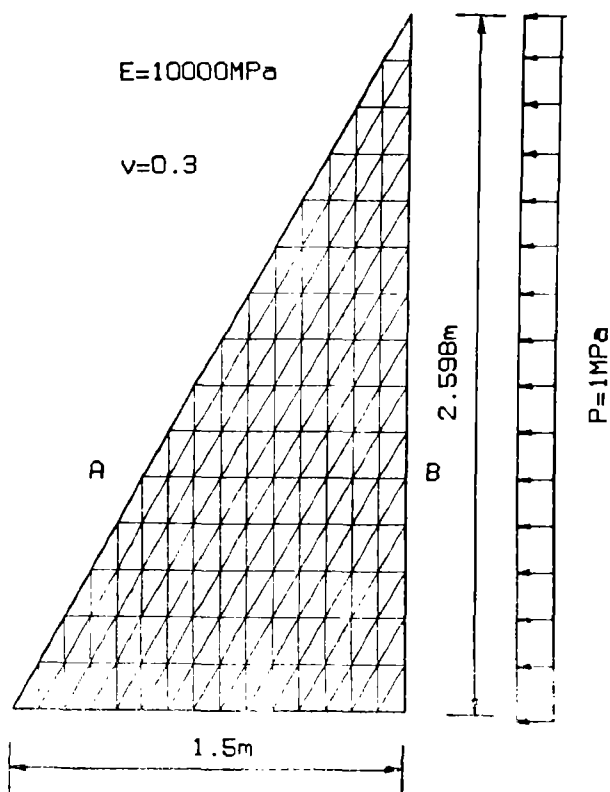


图 5 受均布荷载作用楔形体的弯曲
考虑两种情况。

情况 1: 两种材料具有同样的弹性性质和材料参数;

情况 2: 两种材料具有不同的弹性性质, 其弹性模量之比为 100 : 1, 靠近固定边界的材料具有较大的弹性系数。

对情况 1, 由于两种材料的弹性性质相同, AB 交界面上的接触应力无论是用本文介绍的方法, 还是用位移有限元法得到的结果都是相同且连续的, 说明接触单元也适用均质材料。图 6 和图 7 分别表示该工况的网格变形图和主应力图。

对情况 2, 由于两种材料的弹性性质不同, AB 交界面上的接触应力对应于本文方法和普通有限元法有较大差别。图 8 和图 9 分别表示该工况的网格变形图和主应力图, 从中可见, 在 AB 交界面的下侧两主应力的方向趋于与交界面平行和垂直, 这是由于靠近固定端处的材料有较大的刚性系数。

3 结 论

上述算例证实了该单元的实用性和可靠性。由于该单元可在单元水平上进行刚度和荷载的组装, 因而具有程序设计简单和容易与标准有限元程序连接的特点, 便于实际工程应用。

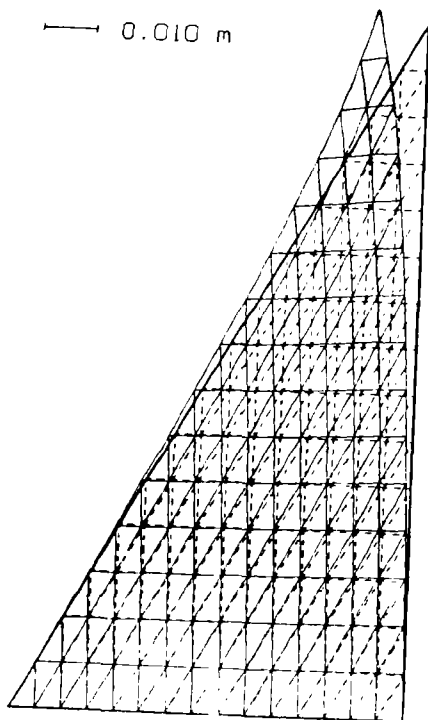


图 6 网格变形图 (情况 1)

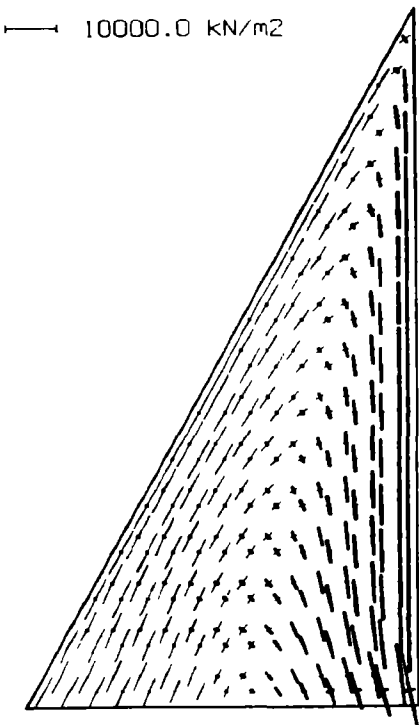


图7 主应力图 (情况1)

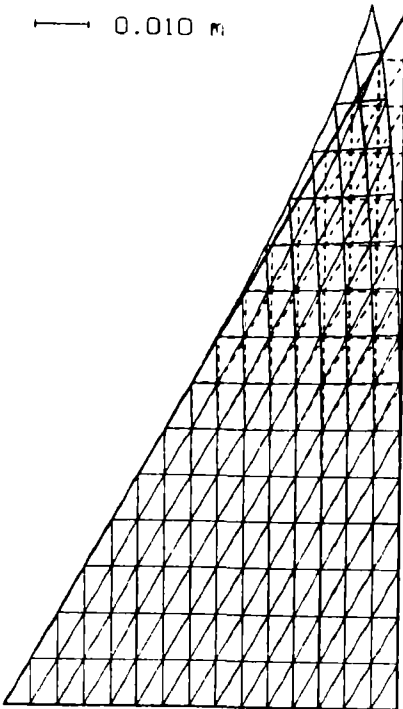


图8 网格变形图 (情况2)

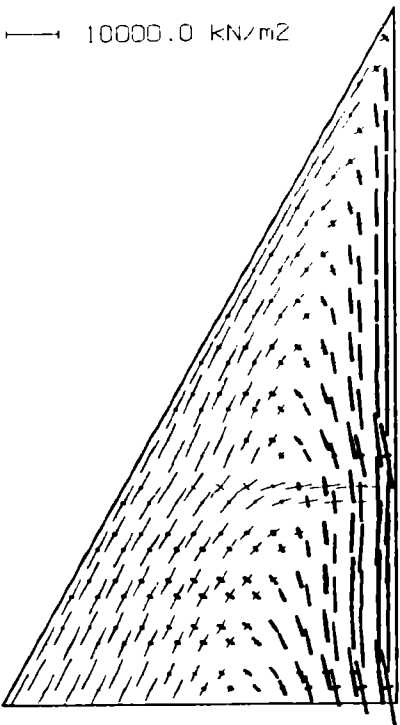


图9 主应力图 (情况2)

参 考 文 献

- [1] A. Shirazi-Adl, An interface continuous stress penalty formulation for the finite element analysis of composite media, Computers & structures, Vol. 33, No. 4, P. 951-956, 1989
- [2] G. Loubignac, G. Cantin and G. Touzot, Continuous stress field in finite element analysis, Technical notes, AIAA Jnl. 15, P. 1645-1647, 1977
- [3] L. R. Herrmann, Improved stress calculations for simple quadrilateral elements, Computers & structures, No. 6, P. 141-148, 1976.
- [4] M. Salama and S. Utku, Stress computation in displacement methods for two-material elastic media, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 10, P. 325-338, 1977

Computation of Contact Stress on Composite Material Interface

Lei Xiaoyan

ABSTRACT

There are plenty of structures made from different materials. To these multy-structures, it is very important to calculate contact stress of material interface. The stresses obtained by the standard displacement finite element method are discontinuous and are short of accuracy. In the paper, a new type of contact element used on the interface of different materials is presented here. Employing the virtual displacement principle and considering constraint conditions of material interface, the stiffness matrix and equivalent load vector for this element are established. The element has the advantages of simple to computation and easy to programming. The test examples show the effective and reliability of the element.

Key words: Contact stress; Contact element; Finite element method