

非完整力学系统不稳定性的充分条件

圣小珍

(建筑工程系)

摘 要

本文从非完整力学系统的 Voronev 方程出发, 利用其能量积分讨论了平衡位置的不稳定性, 得到了一个推广现有结果的充分性条件, 最后举例说明该条件的应用。

关键词: 非完整力学系统; 稳定性

1 运动微分方程及能量积分

本文考虑受理想、稳定约束的非完整力学系统平衡位置的不稳定性。文中, 我们用粗体字母表示矢量, 用方括号表示矩阵, 我们还要用到集合论中“属于”、“包含在”、“交”的符号“ $\in$ ”、“ $\subset$ ”、“ $\cap$ ”。我们用 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 描述系统的位形, 并设其 g 个非完整约束具普划夫形式:

$$q_{g'+j} = \sum_{i=1}^n b_{g'+j,i} q_i \quad (g' = n - g, j = 1, 2, \dots, g) \quad (1)$$

其中 $b_{g'+j,i}$ 是 $\mathbf{q} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ 的连续可微函数, 此处 Ω 为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中一开集, 原点 $\mathbf{o} \in \Omega$ 。系统的动能 $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 可表为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\mathbf{A}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

其中 $[\mathbf{A}(\mathbf{q})]$ 为 $n \times n$ 阶对称矩阵, 对 $\mathbf{q}$ 连续可微。如令 $\mathbf{p} = (q_1, q_2, \dots, q_{g'})^T \in \mathbf{R}^{g'}$, 则由 (1) 可得

$$\mathbf{q} = [\mathbf{B}(\mathbf{q})] \mathbf{p} \quad (1)'$$

其中 $[\mathbf{B}(\mathbf{q})]$ 为 $n \times g'$ 矩阵, 对 $\mathbf{q}$ 连续可微。将 (1)' 代入 (2) 得嵌入约束 (1) 后的动能

本文于 1992 年 9 月 14 日收到

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T [\mathbf{B}(\mathbf{q})]^T [\mathbf{A}(\mathbf{q})] [\mathbf{B}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \triangleq \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T [\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \quad (3)$$

由(3)知, $\tilde{T}$ 只是 $\mathbf{q}$ 、 $\dot{\mathbf{p}}$ 的函数, $[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})]$ 是 $g' \times g'$ 对称矩阵。我们假定 $[\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{o})]$ 是正定矩阵。

设系统只受有势力, 势能为 $U(\mathbf{q})$, 它关于 $\mathbf{q}$ 连续可微。于是系统的运动微分方程为^[1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial (\tilde{T} - U)}{\partial q_{g'+j}} b_{g'+j,i} \\ &+ \sum_{j=1}^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_{g'+j}} \sum_{k=1}^{g'} \left(\frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial q_i} \right) \\ &+ \sum_{l=1}^r (b_{g'+l,i} \frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial q_{g'+l}} - b_{g'+l,i} \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial q_{g'+l}}) \dot{q}_k \end{aligned} \quad (4)$$

($i = 1, 2, \dots, g'$)

系统的平衡位置由

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^r \frac{\partial U}{\partial q_{g'+j}} b_{g'+j,i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, g')$$

确定。设 $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 为一平衡位置 (例如, 当 $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 有 $\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$) 时, $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ 便是一平衡位置) 我们来讨论这个平衡位置的不稳定性。至于其它平衡位置, 可由坐标平移将其化为原点。

运动微分方程 (4) 在约束 (1) 下, 有能量积分^[2]

$$\tilde{T} + U = \text{Const.} \quad (5)$$

这个能量积分在非完整力学系统的稳定性研究中发挥重要作用。

2 引理^③

设 $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $Z(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ 充分光滑, 使

$$\dot{\mathbf{x}} = Z(\mathbf{x}) \quad (*) \quad (6)$$

的解唯一存在。 $F \subset \Omega$ 是 (*) 的一个正不变集, $\mathbf{o} \in \partial F$ (∂F 表示 F 的边界)。对实数 $\epsilon > 0$, 用

B_ϵ 表 R^n 中以原点为中心 ϵ 为半径的开球, 且 $\bar{B}_\epsilon$ (B_ϵ 的闭包) $\subset \Omega$. 定义 $G = B_\epsilon \cap F$. 如果存在连续可微函数 $V: \Omega \rightarrow R$, $x \mapsto V(x)$, 使得

1° 存在点列 $\{x_{\alpha_i} \in G$; 当 $i \rightarrow \infty$ 时, $x_{\alpha_i} \rightarrow 0$, 但 $x_{\alpha_i} \neq 0$ 使 $V(x_{\alpha_i}) > 0$;

2° 任取 $x \in \bar{G}$ ($\bar{G}$ 表示 G 的闭包), 只要 $V(x) > 0$, 则 $V(x)$ 沿着 $(*)$ 的导数 $V_{(x)}$, $(x) > 0$;

则方程 $(*)$ 的零解 $x=0$ 是不稳定的。

3 定理

如果存在满足 $\bar{B}_\epsilon \subset \Omega$ 的实数 $\epsilon > 0$, 使得

(I) $\theta = \{q \in B_\epsilon, U(q) < 0\}$ 是非空集合;

(II) $0 \in \partial\theta$, 即 θ 的边界包含原点;

又设存在连续可微函数 $f(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_{g'}(p))^T: B_{\epsilon'} \rightarrow R^{g'}$ 及数 $\alpha \geq 0$, 使得

(III) $f(0) = 0$; 此处 $B_{\epsilon'}$ 是 B_ϵ 在 $R^{g'}$ 空间中的投影;

(IV) $[\tilde{A}(0)] \left(\left[\frac{\partial f}{\partial p}(0) \right] - \frac{\alpha}{2} [I] \right) + \left(\left[\frac{\partial f}{\partial p}(0) \right] - \frac{\alpha}{2} [I] \right)^T [\tilde{A}(0)]^T$ 正定, 此处

$[I]$ 为 $g' \times g'$ 单位矩阵, $\left[\frac{\partial f}{\partial p}(0) \right]$ 表示矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial q_{g'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{g'}(p)}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_{g'}(p)}{\partial q_{g'}} \end{bmatrix}$$

在 $p=0$ 处取值;

(V) 当 $q \in \theta$ 时,

$$\alpha U(q) + \sum_{i=1}^{g'} f_i(p) \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{g'} \frac{\partial U(q)}{\partial q_{g'+j}} b_{g'+j-i} \right) < 0;$$

则方程 (4) 的零解 $q=q^*=0$ 是不稳定的。

在证明定理之前, 我们先说明定理的力学意义。在讨论力学系统的稳定性和不稳定性问题时, 势能发挥重要作用。我们知道, 当势能在平衡位置处具有严格极小值时, 则该平衡位置是稳定的, 这就是著名的 Lagrange-Dirichlet 定理。但当势能在平衡位置不取严格极小值时, 则平衡位置不一定就是不稳定的。要使得平衡位置不稳定, 还必须对势能附加一些条件, 这是一个迄今未能彻底解决的问题。在我们的定理中, 条件 (I)、(II) 指明势能在原点不取严格极小, 因为存在一个其边界包含原点的集合 θ , 在该集合上, 势能取负值; 条件 (III)、(IV)、(V) 指明导致平衡位置不稳定应再附加在势能上的条件。

定理的证明: 我们分五步来证明定理。

(1) 定义集合

$$F = \{\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T\}^T: \tilde{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) + U(\mathbf{q}) = 0, \dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{B}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}}\} \quad (6)$$

因为方程(4)有能量积分(5), 因此 F 是方程(4)的正不变集。令 $G = F \cap (B_1 \times B_1)$ 。考虑到 $\tilde{T}(\mathbf{o}, \dot{\mathbf{p}}) > 0$ 对 $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$, 而当 $\mathbf{q} \in \partial B_1$ 时, $U(\mathbf{q}) < 0$, 且 $\mathbf{o} \in \partial B_1$, 故 F 非空^[1]而 G 非空, 且 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的原点 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T \in \partial G$ 。又在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的任意小邻域内, 均可找到 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 使 $\dot{\mathbf{p}} \neq \mathbf{o}$ 。

(2) 取辅助函数

$$V = \langle \mathbf{f}(\dot{\mathbf{p}}) / [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \rangle \quad (7)$$

此处“/”表示矢量的内积。 V 是其自变量的连续可微函数, 计算 V 沿(4)的导数为

$$\dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) = \langle \mathbf{f}(\dot{\mathbf{p}}) / \frac{d}{dt}([\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}}) \rangle + \langle \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right] \dot{\mathbf{p}} / [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \rangle \quad (a)$$

其中,

$$\begin{aligned} \langle \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right] \dot{\mathbf{p}} / [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \rangle &= ([\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}})^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right] \dot{\mathbf{p}} \\ &= \dot{\mathbf{p}}^T [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})]^T \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right] \dot{\mathbf{p}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \{ [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right]^T [\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})]^T \} \dot{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}(\dot{\mathbf{p}}) / \frac{d}{dt}([\tilde{\Lambda}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}}) \rangle &= \sum_{i=1}^n f_i(\dot{\mathbf{p}}) \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(\dot{\mathbf{p}}) \left\{ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\tilde{T} - U)}{\partial \dot{q}_{j-1}} \mathbf{b}_{j-1, i-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^g \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_{g'+j}} \sum_{k=1}^{g'} \left[\frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial g_k} - \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial g_i} \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^g (b_{g'+j,k} \frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial g_{g'+l}} - b_{g'+l,i} \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial g_{g'+l}}) \right] \dot{q}_k \}
\end{aligned} \quad (c)$$

将 (b) (c) 代入 (a) 得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{(a)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \{ [\tilde{A}(\mathbf{q})] \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}} \right]^T [\tilde{A}(\mathbf{q})]^T \} \dot{\mathbf{p}} \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{g'} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{g'} f_i(\mathbf{p}) \sum_{j=1}^g \frac{\partial U}{\partial q_{g'+j}} b_{g'+j,i} \right] \\
&\quad + W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}})
\end{aligned} \quad (d)$$

其中

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^{g'} f_i(\mathbf{p}) \left\{ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^g \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_{g'+j}} b_{g'+j,i} \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^g \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_{g'+j}} \sum_{k=1}^{g'} \left[\frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial g_k} - \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial g_i} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=1}^g (b_{g'+l,k} \frac{\partial b_{g'+j,i}}{\partial g_{g'+l}} - b_{g'+l,i} \frac{\partial b_{g'+j,k}}{\partial g_{g'+l}}) \right] \dot{q}_k \}
\end{aligned} \quad (e)$$

利用 (1)、(2)、(3) 式容易把 (e) 表示为二次型形式, 即有

$$W(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T [C(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} \quad (f)$$

其中 $[C(\mathbf{q})]$ 为 $g' \times g'$ 方阵, 且由 (e) 知 $[C(\mathbf{0})] = [0]$.

设 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 注意到 F 是不变集, 故 $\alpha[\tilde{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) + U(\mathbf{q})] = 0$, 用 (d) 式减此式可得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \left\{ [\tilde{A}(\mathbf{q})] \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right)^T [\tilde{A}(\mathbf{q})]^T + [\mathbf{C}(\mathbf{q})] \right\} \dot{\mathbf{p}} \\
 &\quad - [\alpha U(\mathbf{q}) + \left\{ \sum_{i=1}^r f_i(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial U}{\partial q_{s'+j}} b_{s'+j,i} \right) \right\}]
 \end{aligned} \quad (8)$$

(3) 现在要证明, 只要 ε 充分小, 当 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$ 时, 有

$$\dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) \geq -[\alpha U(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^r f_i(\mathbf{p}) \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial U}{\partial q_{s'+j}} b_{s'+j,i} \right)] \quad (9)$$

事实上, 当 $\dot{\mathbf{p}}=0$ 时, 由 (8) 知 (9) 成立. 另一方面, 由定理条件 (N) 知矩阵 $[\tilde{A}(\mathbf{o})]$ $\left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{o})}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right) + \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{o})}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right)^T [\tilde{A}(\mathbf{o})]^T + [\mathbf{C}(\mathbf{o})]$ 正定. 因此, 只要 ε 充分小, (使 $\|\mathbf{q}\|$ 充分小), 矩阵 $\tilde{A}(\mathbf{q}) \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right)$

$$+ \left(\left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right] - \frac{\alpha}{2} [\mathbf{I}] \right)^T [\tilde{A}(\mathbf{q})]^T + [\mathbf{C}(\mathbf{q})] \text{ 依然是正定的, 从}$$

而当 $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$ 时, (8) 中二次型恒正, 于是 (9) 成立.

(4) 下面证明, 在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的任意小邻域内, 可找到一点 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 使 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) > 0$. 事实上, 前已指出, 在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的任意小邻域内, 存在 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 即

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \{ [\tilde{A}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}} + U(\mathbf{q}) = 0, \dot{\mathbf{q}} = [\mathbf{B}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}}$$

且 $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$ 由上式可知, $(\mathbf{q}^T, -\dot{\mathbf{q}}^T)^T$ 也属于 G . 因此, 如果 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T$ 使 $(\mathbf{f}(\mathbf{p}) / ([\mathbf{A}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{p}})) \neq 0$, 则, 或者取 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T$, 或者取 $(\mathbf{q}^T, -\dot{\mathbf{q}}^T)^T$, 总可以使 $V > 0$. 另一方面, 如果在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的某个邻域内任取 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 使 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) \equiv 0$, 则由于 F 是不变集及 G 的定义, V 沿着 (4) 的导数

$$\dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) \equiv 0 \quad (10)$$

我们指出 (10) 不能成立。事实上, 前已指出, 在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的任意小领域内, 总可以找到一点 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 使 $\dot{\mathbf{p}} \neq 0$, 此时, 由 G 的定义知 $U(\mathbf{q}) < 0$, 即 $\mathbf{q} \in \theta$, 从而由 (9) 式及条件 (V) 有

$$\dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) > 0 \quad (11)$$

从而 (10) 式不能成立。

(5) 这样, 我们就证明了, 在 $(\mathbf{o}, \mathbf{o})^T$ 的任意小领域中, 可找到 $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T)^T \in G$, 使 $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) > 0$ 。由 V 的定义知, $(\dot{\mathbf{p}}) \neq 0$, 从而由 G 的定义知 $U(\mathbf{q}) < 0$, 即 $\mathbf{q} \in \theta$ 。由 (9) 式及条件 (V) 知 $\dot{V}_{(4)}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}) > 0$ 。根据引理知, 方程 (4) 的零解是不稳定的, 证毕。

令 $\alpha = 0$, $f_i(\mathbf{p}) = q_i$ ($i = 1, 2, \dots, g'$), 则有

推论: 如果存在实数 $\epsilon > 0$ ($\bar{B}_\epsilon \subset \Omega$), 使得

(I) $\theta = \{\mathbf{q} \in B_\epsilon, U(\mathbf{q}) < 0\}$ 是非空集合;

(II) $\mathbf{o} \in \partial\theta$;

(III) 当 $\mathbf{q} \in \theta$ 时:

$$\sum_{i=1}^{g'} q_i \left(\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial q_{s+j}} b_{s+j,i} \right) < 0;$$

则方程 (4) 的零解 $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{o}$ 是不稳定的。

注: 此推论包含 B. B. Румянцев 的结果^[4]。

4 算例 设一单位质量质点作空间曲线运动, 用 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ 确定其位移, 用非完整约束

$$\dot{q}_3 = b_{31}\dot{q}_1 + b_{32}\dot{q}_2 = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2$$

来约束质点在 q_3 方向的速度。我们来讨论质点在平衡位置处的不稳定性。

嵌入约束后, 质点的动能为

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_2^2\dot{q}_1^2 - 2q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1^2\dot{q}_2^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} [(1 + q_1^2) \dot{q}_1^2 + (1 + q_2^2) \dot{q}_2^2 - 2q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

当 $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ 时 $\tilde{A}(\alpha) = \text{diag}(1, 1)$ 正定。令势能

$$\begin{aligned} U(q) &= -q_1^2 + 2q_1 q_2^2 - q_2^4 - \frac{3}{32} q_2^4 - \frac{1}{2} q_3^2 \\ &= -q_1^2 + 2q_1 q_2^2 - \frac{5}{32} q_2^4 - \frac{1}{2} q_3^2 \end{aligned}$$

因此 $\frac{\partial U(\alpha)}{\partial q_i} = 0$ ($i=1, 2, 3$)， $q=q=0$ 是一平衡位置，且对一切 $q \neq 0$ ， $U < 0$ 。我们有

$$S = \sum_{i=1}^2 q_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_3} b_{i,3} \right) = -2(q_1 - \frac{3}{2} q_2^2)^2 + \frac{1}{8} q_2^2$$

因此，当 $q_1 = \frac{3}{2} q_2^2$ 时， $S = \frac{1}{8} q_2^2 > 0$ 。于是用推论不能断定质点的平衡位置是否不稳定。

用定理来判断。为此令 $\alpha=1$ ， $f_i(p) = q_i$ ($i=1, 2$)，则有

$$\begin{aligned} \alpha U(q) + \sum_{i=1}^2 f_i(p) \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U(q)}{\partial q_j} b_{i,j} \right) \\ &= U(q) + S \\ &= -q_1^2 + 2q_1 q_2^2 - \frac{5}{32} q_2^4 - \frac{1}{2} q_3^2 - 2q_1^2 + 6q_1 q_2^2 - \frac{35}{8} q_2^4 \\ &= -3 \left[(q_1 - \frac{4}{3} q_2^2)^2 + \frac{13}{288} q_2^4 \right] - \frac{1}{2} q_3^2 < 0 \end{aligned}$$

由定理知，质点的平衡位置是不稳定的。

参 考 文 献

- [1] 梅风翔. 非完整力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985: 141—143
- [2] R. 罗森伯著, 程迺巽等译. 离散系统分析动力学. 北京: 人民教育出版社, 1981: 275—279
- [3] N. Rouche, P. Habats, M. Laloy. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Springer—Verlag. New York, (1977). 105
- [4] Каралетян А В, Румянцев В В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. М.: ВИНТИ. (1983) 55—62
- [5] 梅风翔. 非完整系统的平衡位置及其稳定性、稳定、振动、分叉与混沌研究. 北京: 中国科学技术出版社, 1992: 25—33

A Sufficient Condition for the Instability of a Non—holonomic Mechanical System

Sheng Xiaozhen

ABSTRACT

In this paper, a sufficient condition for the instability of a non—holonomic mechanical system described by Воронед's equations is proved and illustrated, and this result contains the previous ones.

Key words: Non—holonomic mechanical system; Stability