关于微分中值 ξ 的注记

邓毅雄

(基础课部)

摘 要

本文讨论了微分中值 ξ 的可导性与单调性。结果：如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶连续导数，且 $f''(x) \neq 0$ ，则 $\xi(x)$ 在 (a, b) 内可导，并且若 $f''(x)$ 不变号，则 $\xi(x)$ 单调增加。

关键词：微分中值；导数；单调增加

拉格朗日中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，则存在 $\xi \in (a, b)$ ，使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

注意到，当 a 固定时， ξ 随 b 而变化。设 $x \in (a, b)$ ，则在

$$f(x) - f(a) = f'(\hat{\xi})(x - a) \quad (1)$$

中 $\hat{\xi} = \hat{\xi}(x)$ ，本文拟考虑 $\hat{\xi}(x)$ 的可导性与单调性。

定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶连续导数，且 $f''(x) \neq 0$ ，则(1)式中 $\hat{\xi}(x)$ 可导。

证 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，则

$$f'(\hat{\xi}(x)) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad a < \hat{\xi}(x) < x < b$$

$$f'(\hat{\xi}(x + \Delta x)) = \frac{f(x + \Delta x) - f(a)}{x + \Delta x - a} \quad a < \hat{\xi}(x + \Delta x) < x + \Delta x \leq b$$

本文于1992年11月23日收到

上两式相减得:

$$f'(\xi(x+\Delta x)) - f'(\xi(x)) = \frac{(x-a)[f(x+\Delta x) - f(x)] - \Delta x[f(x) - f(a)]}{(x+\Delta x - a) - (x-a)}$$

显然, $f'(x)$ 在 $\xi(x+\Delta x)$ 与 $\xi(x)$ 构成的区间上满足拉格朗日中值定理条件, 则上式左边

$$\begin{aligned} f'(\xi(x+\Delta x)) - f'(\xi(x)) &= \frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} \cdot \frac{f'(\xi(x+\Delta x)) - f'(\xi(x))}{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)} \cdot \Delta x \\ &= \frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} \cdot f''(\eta) \Delta x \end{aligned}$$

η 在 $\xi(x+\Delta x)$ 与 $\xi(x)$ 之间。

显然:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\xi(x+\Delta x) - \xi(x)] = 0$ 即 $\xi(x)$ 连续。那么

$$\frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}(x-a) - f(x) + f(a)}{f''(\eta)(x+\Delta x - a)(x-a)}$$

上式两边取极限 $\Delta x \rightarrow 0$ 得

$$\xi'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x) + f(a)}{f''(\xi(x))(x-a)^2} \quad (2)$$

这里 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta = \xi(x)$, 又 $f''(x)$ 连续, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f''\eta = f''(\xi(x))$, 所以 $\xi(x)$ 在 (a, b) 内可导。

推论 在定理条件下, 且 $f''(x)$ 不变号, 则 $\xi(x)$ 在 (a, b) 内单调增加。

证 由(2)式得

$$\begin{aligned} \xi'(x) &= \frac{f'(x)(x-a) - f'(\xi)(x-a)}{f''(\xi(x))(x-a)^2} \\ &= \frac{f'(x) - f'(\xi)}{f''(\xi(x))(x-a)} \quad \xi \in (a, x) \end{aligned}$$

若 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增加, 又 $x > \xi$, 则 $f'(x) - f'(\xi) > 0$, 故 $\xi'(x) > 0$;
若 $f''(x) < 0$, 则 $f'(x)$ 单调减少, 又 $x > \xi$, 则 $f'(x) - f'(\xi) < 0$, 同样有 $\xi'(x) > 0$.
所以 $\xi(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

参 考 文 献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析(上). 北京:人民教育出版社, 1980:148—154
[2] 同济大学数学教研室. 高等数学(上). 第二版, 北京:高等教育出版社, 1981:162—166

A Note of Differential Mean Value ξ

Deng Yixiong

ABSTRACT

This paper discusses the derivatiability and monotonicity of differential mean value ξ . The results: if $f(x)$ is continuous on $[a, b]$ and there is second order continuous derivative in (a, b) , and $f''(x) \neq 0$, then $\xi(x)$ is derivatiabile; and if $f''(x) > 0$ (or < 0), then $\xi(x)$ is monotone increasing.

Key words: Differential mean value; Derivative; Monotone increasing