

## 关于直径 $K$ -极小图的一点注记

徐保根

(基础课部)

### 摘 要

在文 [1] 中有如下猜想: 若  $G$  为  $n$  阶直径  $K$ -极小图 ( $K > 2$ ), 则:  $|E(G)| \leq (1 + o(1))n^2/2(K+1)^2$ . 本文证明了这一猜想是不正确的.

关键词: 图; 直径; 直径  $K$ -极小图

本文所指的图均为无向单图. 文中未说明的符号、术语同于文 [2].

定义 若图  $G$  的直径  $d(G) = K$ , 并且对于  $G$  中任意一边  $e$ , 均有  $d(G-e) > d(G)$ , 则称  $G$  为直径  $K$ -极小图.

下面总假设  $G_{n,K}$  表示  $n$  阶直径  $K$ -极小图中边数最多的一个图.

引理 1 对于任意正整数  $n$  和  $K$  ( $n > K$ ), 且  $K$  为奇数, 则

$$|E(G_{n,K})| \geq \binom{\lceil \frac{2n}{K+1} \rceil}{2}$$

其中:  $\lfloor x \rfloor$  表示不超过  $x$  的最大整数,  $\binom{m}{2}$  表示  $m$  个元素中取两个的组合数, 即等于  $\frac{1}{2}m(m-1)$ .

证: 我们只需要构造一个  $n$  阶直径  $K$ -极小图  $G$ , 使得:

$$|E(G)| \geq \binom{\lceil \frac{2n}{K+1} \rceil}{2}$$

如图 (1) 所示, 由于  $K$  为奇数.

令:  $K = 2t + 1$  ( $t \geq 0$ )

$$S = \lfloor \frac{n}{t+1} \rfloor = \lceil \frac{2n}{K+1} \rceil$$

本文于 1993 年 3 月 27 日收到

在完全图  $K_s$  中, 每个顶点分别粘接 (使之重合) 于一条长为  $t$  的道路  $P_{t+1}$  的一个端点。如图 (1) 所示, 这  $S$  条道路两两无公共点。这样得到的图  $G_1$  的阶数为  $S(t+1)$ 。

$$\text{令: } x = n - s(t+1) = n - (t+1)\left\lceil \frac{n}{t+1} \right\rceil \geq 0$$

在  $G_1$  中任意选择一个非悬挂点  $u$ , 在  $u$  点再增加  $x$  条悬挂边 (图 (1) 中虚线所示), 这同时也增加了  $x$  个悬挂点。上述所得到的图  $G$  阶数为  $n$ , 其直径为  $K$ 。且不难验证,  $G$  为  $n$  阶直径  $K$ -极小图。其边数:

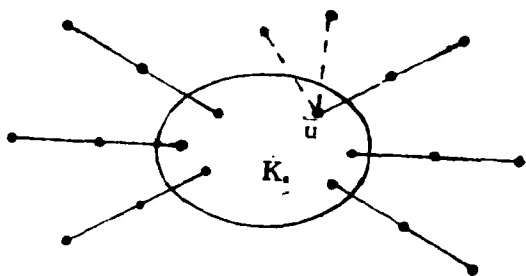


图 (1)

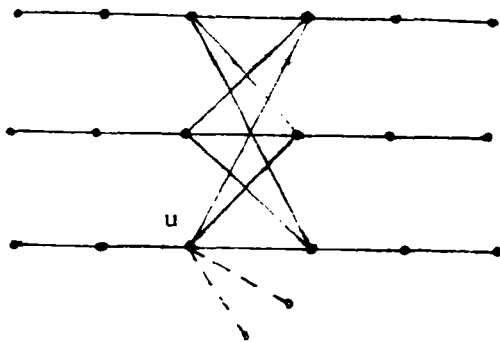


图 (2)

$$|E(G)| = \binom{s}{2} + n - s = \left\lfloor \frac{\frac{2n}{K+1}}{2} \right\rfloor + n - \left\lceil \frac{2n}{K+1} \right\rceil$$

$$\text{即 } |E(G)| \geq \left\lfloor \frac{\frac{2n}{K+1}}{2} \right\rfloor \quad \text{引理 1 证毕。}$$

引理 1 对于任意正整数  $n$  和  $K$  ( $n > K$ ), 且  $K$  为偶数。则:

$$|E(G_{n,K})| \geq \left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil^2$$

证 只需构造一个  $n$  阶直径  $K$ -极小图  $G$ , 使得其边数:

$$|E(G)| \geq \left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil^2$$

如图 (2) 所示, 由于  $K$  为偶数, 令:

$$K = 2t (t \geq 1)$$

$$s = \left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil$$

在完全二部图  $K_{s,t}$  中, 每个顶点分别粘接 (使之重合) 于一条长为  $t-1$  的道路  $P_t$  的一个端点, 如图 (2) 所示。这  $2s$  个  $P_t$  两两无公共点, 这样得到一个  $2st$  阶图  $G_1$ 。

$$\text{令: } x = n - 2st = n - K \left\lceil \frac{n}{K} \right\rceil \geq 0$$

在  $G_1$  中任意选择一个非悬挂点  $u$ , 在  $u$  点再增加  $x$  条悬挂边 (图 (2) 中虚线所示), 同时这

也增加了  $x$  个悬挂点, 这样便得到了图  $G$ 。显然  $G$  的阶数为  $n$ , 其直径为  $K$ 。不难验证,  $G$  为直径  $K$ -极小图。

由  $G$  的构造可知:

$$\begin{aligned}|E(G)| &= s^2 + n - 2s \\ &= \left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor^2 + n - 2\left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor^2\end{aligned}$$

引理 I 证毕。

由引理 I 和引理 II 的证明中, 我们有:

**定理** 对于任意正整数  $n$  和  $K$  ( $n > K$ ), 均存在  $n$  阶直径  $K$ -极小图  $G$ 。使得:

$$|E(G)| = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2n}{K+1} \right\rfloor + n - \left\lfloor \frac{2n}{K+1} \right\rfloor & K \text{ 为奇数时} \\ \left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor^2 + n - 2\left\lfloor \frac{n}{K} \right\rfloor & K \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

其中  $\lfloor x \rfloor$  表示不超过  $x$  的最大整数。

比较上述定理与文 [1] 中的上述猜想, 我们不难看出猜想是不正确的。

### 参 考 文 献

- [1] Z. Füredi. The Maximum Number of Edges in a Minimal Graph of Diameter 2. J. Graph Theory 1992. Vol. 16 No. 1. 81~98
- [2] F. 哈拉里. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980

## A Note on Minimal Graph of Diameter $K$

Xu Baogen

### ABSTRACT

Z. Füredi (See in [1]) stated these as the following conjecture: If  $G$  is a minimal graph of diameter  $K$ . With  $K > 2$ , then  $|E(G)| \leq (1+o(1))n^2/2(k+1)^2$ . We prove the conjecture is not true.

**Key words:** Graph; Diameter; Minimal graph of diameter  $K$ .