

抽象——数学发展的必然

龚代华

(基础课部)

摘 要

数学的三个特点之一便是抽象,抽象使数学精确化和应用广泛,抽象是数学发展的必然过程,数学将从抽象走向更抽象。

关键词:抽象;抽象化;精确;特征;共性

0 引 言

我们知道数学的特点是:(1)高度抽象,(2)严密精确,(3)应用广泛。尽管现代数学分支众多,内容丰富,但从宏观意义上讲现代数学仍能具有上述三个特点。甚至现代数学的这三个特点比任何其它时期的数学都显得更突出,更明显。我们认为数学的三个特点中、最重要,最具有决定性的特点便是高度抽象。抽象使我们能舍取事物的其它属性而专注地认识事物的数量关系和空间形式方面的特征。这样才能使认识的对象简单化、理想化、系统化。因而使我们能从一类事物中抽取共性,虽然这个共性只是每个事物的近似反映,但它却深刻地反映了事物的特征。正如列宁指出:“当思维从具体的东西上升到抽象的东西时,它不是离开——如果它是正确的……——真理,而是接近真理,物质的抽象,自然的抽象,价值的抽象及其它等。一句话,那一切科学的(正确的、郑重的、不是荒唐的)抽象,都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。从生动的直观到抽象的思维、并从抽象的思维到实践,这就是认识真理,认识客观实在的辩证的途径。”^[1]正因为抽象的这些功能,才使数学的研究对象简化为纯粹数量关系和几何形式。因此,在公理体系的基础上对这些抽象概念进行严密推理、论证而建立起来的数学体系是合乎逻辑的,因而是精确的。在数学体系建立的过程中,数学概念的抽象性、纯粹性保证了数学概念之间逻辑关系的确定性,并使逻辑关系简单明了。这可从一个简单的例子看出。在数学中 $2>1$ 的逻辑性是非常明确的,但要是这两个数学没有完全抽象出来而是和某种事物结合在一起,则情形就完全不同了。比如2头牛 >1 头牛在逻辑上远不如 $2>1$ 明确,容易引起逻辑混乱,故此,我们完全有理由下结论:合理的抽象是数学精确化的基础。

从现实世界中抽象出来的数学概念和形式不但没有脱离现实,恰恰相反,而是更丰富、更

本文于1992年12月14日收到

多样地反映现实。正因为这样，当我们赋予数学公式不同的实际意义，我们都能由此解决不同的实际问题。抽象的形式好像一个空筐，它可以装得下有适度任意性的物品，抽象度越高、装容的灵活性就越大，这是数学能被广泛应用的基本原因。^⑨因此，可以说抽象化是数学精密化和应用广泛的前提。数学发展的历史表明：数学发展的道路永远是：实际—抽象—更抽象。而相应地数学变得：精确—更精确，应用广泛—更广泛。所以抽象化是数学发展的必然过程。

1 抽象，数学诞生的标志

每一数学分支尽管内容不同，处理对象各异，但不外都是由一些抽象概念及抽象命题所包含的抽象概念间逻辑关系构成，简言之，数学是由抽象的概念与关系组成，这种构成自数学诞生之日便存在，其区别只在于抽象的程度，关系的复杂程度不同。

自然数是数学的第一个抽象概念。因此，自然数的出现标志着数学的诞生，从此数学才有可能在自然数的基础上进一步发展。在今天人们看来自然数是最简单不过的东西，人们在经常使用它时丝毫没有意识到其抽象性。然而就是这个最简单，最普通的抽象概念的产生也不是一蹴而就，就象其它任何文明的萌芽的出现一样而是经历了一个漫长的孕育过程。自然数有两种功能，一是度量功能，二是计算功能。度量功能可以确定任何由同类物质组成的有限集合元素的个数。度量功能是通过一一对应来实现的。正是自然数的度量功能才使其完全从现实世界的对等关系中抽象出来而成为一种纯粹形式。数学的另一分支几何学的产生也证明了这一点，几何学是因为丈量土地而产生的，这自然要用到算术，因此它只能在算术发展到一定水平才有可能出现。在几何学中，人们将现实世界物体的所有性质舍取只抽象出其空间形式和大小，从而建立了空间物体的“纯粹形式”。自从有了抽象的数和空间形式之后，数学才有了其研究的全部对象，只有这个时候数学才能具备初步体系，从而在这个体系上数学才能较快发展。

纯粹的数量形式——自然数产生的过程大概是这样的。在数学出现之前，人们用小石子之类的东西来建立和猜物（或其它物类）的一一对应关系。如用一粒石子表示一头羊，二粒石子表示两头羊……。这时人们也许朦胧地意识到2粒石子可以用来代表所有由两个同样东西组成的类数值特征。久而久之，1粒石子、2粒石子、3粒石子…，…，作为第一步的抽象产物被人们用来计数。这里石子是个双重角色，它既是计算工具（相同于筹码之类）又是数本身，因此这种抽象物还是比较直观的，也正是因为这点它才能在人类文明初期被人们接受。漫漫地随着人类文明的发展，完全抽象的数字便诞生了。这虽然是数字发展的第一步，然而确是伟大的一步，从此数学才能在这个基础上不断发展。数字是因为其度量功能而产生的，之后人们便发现了数字的第二功能——计算功能，于是有了简单的算术，慢慢地又出现了代数，微积分……。当然此时数学发展的速度是相当慢的，其过程也极其漫长。但就其内容来看变化是巨大的。然而这都是在自然数的基础上进一步抽象的结果。

2 抽象—共性与理想化

世界是普遍联系，这就是事物间共性存在的基础。决定事物间联系的因素就是事物的内

在客观规律。数学和其它科学一样反映了物质世界的运动规律。数学的任务之一便是从量的角度去揭示和研究事物运动规律,从而帮助人们去认识自然,征服自然,改造自然。数学中的每一个抽象定理,公式都是规律的象征,反映了一类事物的共性,而且抽象程度越高,体现共性的普遍性越大。由于数学规律所揭示的真理也具有相对性,所以人们对于数学的认识永远没有完结,对于数学的认识将继续下去并在现有基础上进一步深化。这就是说还有更多的规律有待于我们去揭示、发现,当然这些规律更深刻,更广泛地反映现实世界和揭示事物间的共性,因而其数学形式也将更抽象。

为什么数学的发展必须经过抽象化这一过程呢?这是因为发现现实世界中许多方面的共同联系形式用统一的方法去处理,这是科学研究的重要任务。^[2]因此,我们认识世界的目的在于通过认识其内在规律去揭示事物间常有普遍性的东西即共性。然而现实世界中的事物总是复杂的,具有多种属性,如大小,形状,结构,颜色、物理性质,化学成分……,这些属性都属于一客体中,而人们对于事物的认识之一般方法总是,由浅入深,由特殊到一般。因此对于具有多种属性的事物的认识只能一个侧面一个侧面地去认识。为了揭示事物的纯数量与空间形式方面的共性,我们既要着眼于整体又要有所专注,整体观是将一类事物作为一个整体进行考虑,这样有利于通过考查事物间的联系来发现事物间的共性。而专注则表现为只考虑事物间的数量关系与空间形式方面的特性而将其余性质舍取。这里,我们的方法是普遍性与特殊性的同一。因此我们可以将一类实际问题通过类比、归纳等方法抽象为一个数学问题或数学模型。当然,这个数学模型必须合理地反映事物的性质,揭示这类问题的共性。一旦建立了合理的数学模型,我们便可暂时抽去问题的实际意义,利用现有数学体系对数学模型进行纯数学的推理、论证。在数学上解决了这个问题之后,便可将其结果广泛用于解决这类问题。在这个过程中抽象化架起了从实践到理论的桥梁,又将理论的“精髓”输送到解决各实际问题的过程中。数学理论就是这样在不断地解决实际问题的过程中发展、完备起来的。人们在生产实践中提出的大量问题为数学的发展提供了丰富的原始资料,通过提炼、抽象等手段,数学从中提取了大量概念,有些概念的产生甚至导致了新的数学分支的诞生。数学就是这样来源于实践又将从实践中获得的高度抽象、完备的理论应用于实践之中。这种例子在数学发展史中不胜枚举的。例如 Euler 在解决著名的 Königsberg 七桥问题时用的便是这种方法。根据问题的性质,他将岛和陆地抽象为一点,桥梁抽象为联结两点的弧线,于是这个问题便抽象为拓扑学中的一笔画问题。Euler 研究了这个问题有解的条件:过每点的线段应是偶数条。由这个条件即可指出这个问题是不可解的。虽然 Euler 建立这个模型仅仅是为了解决七桥问题,但它给出的一笔画的条件却可以用来解决许许多多这类问题。以后这种方法发展为图论这一数学分支。Euler 的成功和合理模型的作用是分不开的。

事实证明、抽象的形式不仅能用于统一处理已知现象,而且能指导新的工作的开展。因此抽象能简明地表示事物的共性又能使理性思维超前。

3 感性—理性,导致了抽象的方法和概念

唯心主义者认为数学完全是人的思维产物,是完全主观的,因而数学是与经验无关的“纯粹理性”的造物,它可以脱离现实世界而孤立地存在,自我发展。这种观点表面上看起

来似乎有道理，但当我们用马克思主义哲学的观点对它进行分析时，就会发现这种观点是完全错误的，其错误在于否认了数学的现实意义。

我们认为数学的概念、定理虽然抽象，现实世界中也找不出真正的数学实体，但数学的内容确是现实的。这是因为数学的概念来源于实践同时又以一种更深刻，更丰富的方式反映现实世界，这就是数学能被广泛用于解决各种实际问题的原因。这也表明数学同样要经过实践的检验，因而数学是有现实意义的。其实恩格斯早就指出过：“……如说在纯数学中理性所涉及的只是自身的创造和想象的产物，那是完全不对的。数和形的概念不是从任何地方，而仅仅是现实世界中得来的。……和所有其它的思维领域一样，从现实中抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界相脱离，并且作为某种好似独立的东西、好似从外面来的规律——世界应当与此规律相适合——而与之相对立……仅仅因为如此，数学才能被一般地应用。”

因为数学的内容是现实的，所以揭示和研究数学规律是我们认识世界的一部分。同时数学本身也具有去帮助人们加深了解自然的任务，这就需要数学的发展先于其它自然科学的发展。然而事实并非如此，数学最初是因为解决实际问题而产生、发展的，当数学发展到一定阶段时，人们便能用数学解决很多实际问题，从而促使了其它自然科学（如力学，天文学，物理学…）的较快发展。反过来这些科学的发展又给数学提出了不少问题，有些问题甚至超出了当时数学的能力。最后这些问题的解决不仅对其它科学的发展起了作用也极大地促进了数学的发展。数学的发展总是以新概念，新方法的出现为标志的。而数学中产生新的概念和方法一般有两种途径，一是将各种零散、缺乏系统的具体方法抽象成一种高度概括的方法，这就是将感性认识进行提炼，去粗取精而得到的一种更高更深刻的认识。数学中的许多概念、方法就是通过这种“感性→理性”的途径而产生的。例如占了整个十八、十九世纪数学中心的基本概念——函数就是通过这种途径而产生。第二种途径便是创造新的数学理论来解决问题，从而使数学理论也得到了极大丰富。这两种方法有一共同点，那就是起源于解决实际问题。因此，解决实际问题推动数学发展的动力之一。这也表明数学的发展受到人们对自然认识的水平以及其它自然科学发展程度的制约。于是新的数学只能在特定的社会背景下产生，因为，只有这种社会背景才能提供大量产生这种数学的感性认识，从而为人们获得理性认识打下基础。故脱离了一定的社会背景，新的数学是不会产生的。例如，早在公元前200多年，阿基米德求抛物线弓形面积的方法已十分接近微积分的方法，但因为历史的限制，当时和科学只是停留在静力学的范围而很少研究变量问题，因而不存在产生微积分的社会基础。只有到了研究变量，研究运动的时候微积分才能应运而生。在这个从感性认识到理性认识的过程中，科学的抽象这一手段具有决定性的作用。

社会的需要永远是数学发展的动力，它不断使数学达到新的理性高度。

4 数学符号使数学的内容和形式都抽象化

数学中系统地引进符号是从十六世纪开始的，它对于以后数学的发展有着深远的意义。它是数学中一个伟大的进步，它使数学从内容到形式都完全抽象化。引进符号不是一件偶然的事情，而是数学发展到一定阶段的必然产物。早期的数学特别是算术，代数无论是计算还是

逻辑推理都是通过文字来叙述的。这种方法有很多弊端：(1) 计算繁琐，工作量大，而且容易错。(2) 说理不清，论证冗长烦琐，逻辑关系不明显，不可靠。以解一元二次方程为例，由于当时没有采用抽象的符号，故没有一元二次方程的一般形式，也就谈不上对一元二次方程作一般性研究。所以当时只能一个一个去求解具体方程，即使用代数方法将方程解出来了，最后得用几何方法去证明它。可见，当时代数中的逻辑推理是如此不可信。只有到了用符号表示一般一元二次方程时，人们才能将具体解方程的方法抽象为求根公式。又如阿基米德求曲边形面积的方法已非常接近微积分方法。但因无法将这些具体方法用高度概括，高度抽象的方式来表达，故具体问题都得靠一种非常巧妙的方法来解决。这些问题要是用微积分方法来解决的话是非常简单的。从以上例子我们还可以看出其第三个弊端，那就是它不能将一些熟知的方法通过提炼，概括等方式使之成为高度抽象的公式、定理，从而阻碍了数学抽象化进程。

以上三个缺点严重地阻碍了数学特别是代数的发展。可以说没有数学符号就没有现代数学。因为，面对现代数学如此抽象、复杂的内容，要是不采用数学符号而仅靠文字叙述，那将是不可想象的事情。因此，没有现在这一套符号体系，数学只能停留在算术和代数初期，因为，当数学发展到初等代数这一阶段时，计算、推理和论证使数学家们的工作变得非常繁重，有些推理中的逻辑关系仅靠文字叙述非常烦琐，甚至常常面对说理不清的困难。为了克服这些困难，有些数学家引进了符号，也许当时数学家们并没有意识到其深远意义，慢慢地人们便发现了其优点：(1) 简化计算。使计算程序化和机械化，不易出错，有如笔算比口算优越一样。(2) 简化思维。它使推理层次清晰，简单明了，而且用一部分机械运动代替了推理论证过程。(3) 能使现有数学体系抽象化、完备化，有助于人们发现数学的内部问题，从而通过解决这些问题而产生更抽象、更先进的数学，促使数学不断发展。

数学发展的历史证明了上述观点，但也从中发现几何学似乎是个反例。因为，创始于两千多年前的欧氏几何至今并无新的发展，也就是说欧氏几何二千多年以前就已经以完备的形式呈现在人们面前，而那时数学符号尚未出现、几何学是否不受数学符号的影响可以独立发展呢？回答是否定的。几何学二千多年以前就完备的历史事实不但没有否定数学符号的重大作用，恰恰相反，它再次证明了数学符号的重大作用。让我们考查一下当时几何所研究的对象及其表示方式。几何所研究的全部对象为点、线、面及由这三个元素组成的可作图形，这三个元素都是从现实世界中提炼出来的完全抽象概念，而且在进行逻辑推理时用了字母表示点、线、面及几何图形。这就是说当时几何所考虑的对象从内容到形式都完全抽象化了，所以几何的发展没有遇到代数发展过程中所遇到的困难。因而几何发展的速度要比算术、代数发展的速度快得多，相反要是完全用文字来描述几何问题，那么几何的发展将会慢得多。所以几何的发展再次证明了数学符号的伟大作用。

数学符号使数学发生了一次数学内部的抽象化革命，它将原来零数、缺乏系统的数学提炼成更精炼，更系统，更抽象的数学体系。这种数学体系既可广泛地应用于解决实际问题，又便于从中发现数学的内部矛盾。

5 抽象体系中数学进一步抽象化

数学发展到一定阶段,特别是数学符号引进之后,数学渐渐地出现了初步的完备体系。于是数学家们完全可以脱离实际背景,甚至具体数学来研究数学,这种更抽象的方法使数学家们能站得更高,更大范围地注视数学,他们关心的不再是数学的某个微观上的进展,而是整个数学的结构合理性、完备性。因此,数学家们在研究过程中能发现大量的内部矛盾,同时数学家们比任何时候都表现得富有想象力,他们在各自研究的基础上大胆地将已知结论推广,对数学中的某些现象进行猜测与不完全归纳,这一切都形成了数学家必须解决的问题,这些问题可分如下两种。(1) 常规问题,这种问题可以在现有数学的基础上解决,它的解决加深了人们对现有数学体系的认识,形成了必要的知识积累,促进了数学的完备化,例如,自从用符号表示方程的一般形式之后,人们便能对方程作一般研究,相继发现了二次、三次和四次方程的求根公式,人们对于解方程的知识稳步增长,这种例子在数学发展史中是不胜枚举的。它们的共同之处在于为数学提供了大量实践,为人们认识数学,检验数学提供了广阔天地,是培育数学知识的沃土。

(2) 非常规问题。这类问题通常不能或者很难用现有数学来解决,通常这类问题的解决要经历一段较长时期,然而问题一旦得到解决往往会产生新的数学分支。例如微分方程就是在解决天文学、力学、物理学和数学本身的问题的过程中产生的,在这类问题中有些问题的解决还会引出更抽象的概念,这些概念在当时看来完全虚构和脱离实际的。事实并不是这样,正因它是从抽象的数学内部提炼出来的概念,所以它便显得更抽象。同时它也以一种更深刻、内在的方式反映现实世界,因此它一下子难于被人们接受。例如虚数就是这样一个概念,它不是从现实世界中提炼出来的,而是出现于数学内部。一开始人们很难接受它。其现实意义也长久没有弄清,以后发现了它的几何解释,后来通过对它的研究形成了复变函数这个理论。人们利用这个理论解决了许多实际问题,如飞机升力、水坝渗水、实函数积分问题,此时人们不仅接受了它,面对其巨大作用不得不发出赞叹。正如恩格斯所说:“只有在结束我们才能达到理性本身自由创造和想象的产物——虚数值”^[3]。

当然,常规和非常规只是相对的,随着数学不断发展,一些原来非常规的问题会转化成常规问题,在这个基础上又会划分出新的常规与非常规问题。这当然是更高层次的划分,数学就是这样以否定之否定的形式发展着,从抽象走向更抽象。

参 考 文 献

- [1] 列宁·哲学笔记·北京:人民出版社,1957: 155
- [2] 王仲春等. 数学思维与数学方法论. 北京:高等教育出版社,1989: 8~9
- [3] 恩格斯·反杜林论·北京:人民出版社,1956: 37

Abstraction—Certainly Process for Mathematics

Gong Daihua

ABSTRACT

One of the therr characts of mathematics is abstraction. Abstraction makes Mathematics become precise and generally available. Abstraction is the certainly process for Mathematics. Mathematics will become more and more abstract.

Key words: Abstract; Adstraction; Precise ; Character; Generality