

消除接触摩擦单元应力振荡的方法

雷晓燕

王五全

(建筑工程系) (江西省第三建筑公司)

摘 要

本文运用特征值分析法对文献(1)提出的接触摩擦单元的应力振荡问题进行了讨论。在接触摩擦单元中,应力振荡常常发生在接触面上应力梯度变化较大的区域。产生应力振荡的原因是对插值函数矩阵进行精确积分或高斯数值积分,采用牛顿柯——特斯积分法则能消除应力振荡。

关键词:应力振荡;接触单元

0 引 言

工程中存在大量接触问题。例如:层状地基、岩石断层、土与结构物及结构物与结构物之间的相互作用等。为了模拟这类非连续问题,Goodman^①首次提出了节理单元,以后又有许多人在这方面做了大量的工作^{②③}。节理单元对具有一定厚度的断层、剪切带和弱软夹层尤其适用。但对厚度很小或不计厚度影响的问题,使用时常产生数值计算困难和得不到满意的解答。因为在这种情况下,需要在接触面的法线方向选择一个人工刚度系数。文献[1]的作者在Katona^④工作的基础上,提出了一种新的接触摩擦单元。这种接触摩擦单元,直接选取接触应力作为节点未知量,而不象节理单元那样需要用弹性系数计算接触应力。因此接触摩擦单元在数值计算过程中是稳定和收敛的。

从事节理单元的研究人员发现在有限元节理单元中存在有虚假应力振荡现象^{⑤⑥}。在接触摩擦单元中同样存在这种现象,即在应力梯度变化较大的接触面上,接触应力存在振荡现象,这与真实情况是违背的。本文运用特征值分析方法,对接触摩擦单元的应力振荡问题进行了研究,指出对插值函数矩阵进行精确积分或采用高斯数值积分方法是引起应力振荡的根源,用牛顿—柯特斯数值积分代替高斯积分能消除应力振荡。

1 接触摩擦单元^{[1][8]}

考察两物体的接触,用标准的有限元离散方法将两物体划分单元,两物体的接触面用双

本文于1993年5月4日收到

节点编号, 采用接触摩擦单元。

运用虚位移原理和引入插值函数, 即可得到联系单元节点接触应力与单元等效节点力之间的关系式

$$\underline{C}^T \underline{S} \underline{\sigma} = \underline{F} \quad (1)$$

其中: $\underline{C}$ 为坐标转换矩阵;

$\underline{\sigma}$ 为局部坐标系中的单元节点接触应力;

$\underline{F}$ 为整体坐标系中的单元等效节点力;

$\underline{S}$ 为插值函数矩阵, 定义为

$$\underline{S} = \int_r \underline{N}^T \underline{N} d\Gamma \quad (2)$$

上式中, $\underline{N}$ 为接触摩擦单元的插值函数。

在二维接触摩擦问题中, 接触条件可分为三类, 即: 固定、滑动和张开。对不同的接触状态, 接触面上的位移和应力应满足不同的平衡条件和连续条件。

接触摩擦单元的接触条件可统一表示成

$$\left\{ \begin{matrix} \underline{C}^T & \underline{R} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{matrix} \right\} = \underline{a}^* \quad (3)$$

其中: $\underline{C}^T$ 为坐标转换矩阵, 与接触状态有关;

$\underline{R}$ 为对角矩阵, 也与接触状态有关;

$\underline{a}$ 为整体坐标系中的单元节点位移;

$\underline{a}^*$ 为局部坐标系中给定的单元相对节点位移或接触应力。

从形式上, (1), (3) 两式可合写成

$$\left[\begin{matrix} \underline{O} & \underline{C}^T \underline{S} \\ \underline{C}^T & \underline{R} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \underline{F} \\ \underline{a}^* \end{matrix} \right\} \quad (4)$$

上式即为接触摩擦单元的有限元方程。由此可见, 在接触摩擦单元中, 节点位移和接触界面上的接触应力是直接作为有限元方程的未知量, 提高了接触应力的计算精度, 不足之处是增加了方程的未知数。

通过标准的有限元集成规则, 可将 (4) 式组集到有限元方程中, 因此该单元容易与现有的有限元程序联接, 这是该单元的又一优点。

2 应力振荡问题

为了研究接触摩擦单元的应力振荡问题, 首先考察两个算例, 采用不同的积分方案, 观察接触界面上接触应力的分布。

算例一为光滑刚性基础与弹性地基作用。^{⑥⑦}有限元网格和材料系数如图 1 所示。其中接

触摩擦单元布置于刚性基础与地基之间。该问题的理论解显示在刚性基础的两端有应力集中现象。图2表示采用高斯数值积分计算插值函数矩阵(2)时,接触应力与理论解的对比;图3表示采用牛顿-柯特斯数值积分时接触应力与理论解的对比。从图中可见,高斯数值积分方案在应力集中区造成应力振荡现象,而牛顿-柯特斯方法则与理论解十分接近,无应力振荡。

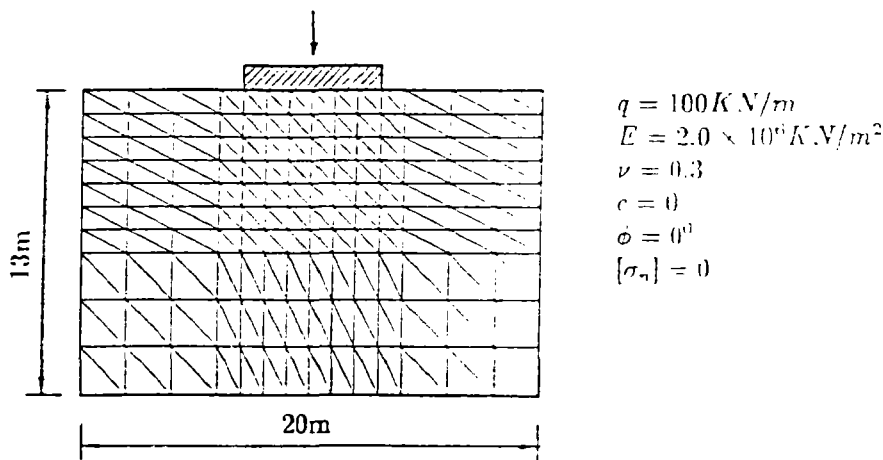


图1 刚性基础与弹性地基的光滑接触

算例二为弹性地基中的桩基拉拔问题,见图4。当逐渐增加作用在桩顶的拉力时,桩基与地基之间的滑动摩擦将自上而下扩展。采用高斯数值积分和牛顿-柯特斯数值积分计算插值函数矩阵(2)时的接触剪应力分别示于图5(a)和(b)中。从图中再一次看到,高斯积分引起应力振荡,牛顿-柯特斯积分无振荡现象。

3 应力振荡的特征值法分析

考察由二个单元组成的系统,一为八节点等参元,另一为接触摩擦单元。假设在接触界面上无外力作用,则沿法线方向,两单元需满足下列平衡条件,即

$$\int_{\Gamma} \underline{N}_e^T \underline{t}_c d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{N}_c^T \underline{t}_e d\Gamma \quad (5)$$

其中:下标“C”表示接触摩擦单元中的量,“e”表示等参元中的量。 $\underline{N}$, $\underline{t}$ 分别表示接触面上的插值函数和分布面力矢量。对接触摩擦单元来说,分布面力即为接触应力 $\underline{\sigma}$ 。

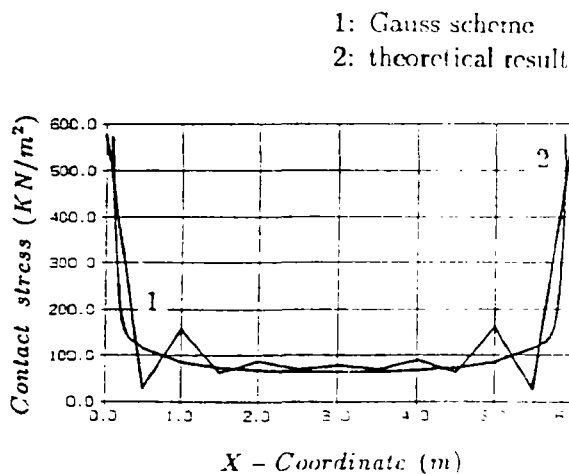


图2 高斯数值积分时接触应力与理论解的对比

利用插值函数,单元内的分布面

力 $\underline{t}$ 可用节点面力 $\hat{\underline{t}}$ 表示成

$$\underline{t} = \underline{N} \hat{\underline{t}}, \quad (6)$$

将上式代入 (5) 中,有

$$\underline{S_c} \hat{\underline{t}}_c = \underline{S_c} \hat{\underline{t}}, \quad (7)$$

其中: $\underline{S}$ 按 (2) 式定义。

由 (7) 式,可得到 $\hat{\underline{t}}_c$

$$\hat{\underline{t}}_c = \underline{T} \hat{\underline{t}}, \quad (8)$$

其中:

$$\underline{T} = \underline{S_c}^{-1} \underline{S_c} \quad (9)$$

在有限元计算中,对外部等参元,常采用高斯数值积分方案。若对接触摩擦单元插值函数矩阵 (2) 式也采用高斯数值积分,则在公共的接触边界

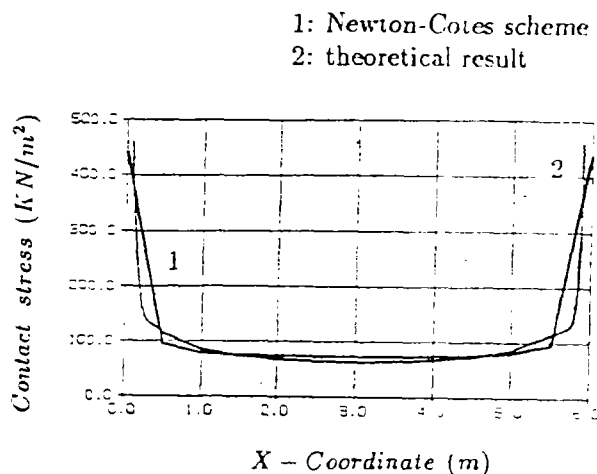
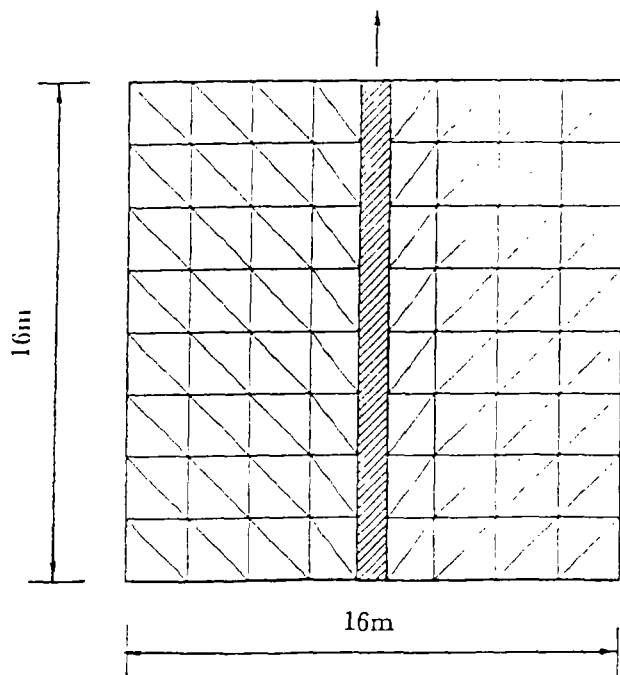


图3 牛顿-柯特斯积分时
接触应力与理论解的对比



$$\begin{aligned} q &= 500 \text{ K N/m} \\ E &= 2.0 \times 10^6 \text{ K N/m}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ c &= 50 \text{ K N/m}^2 \\ \phi &= 30^\circ \\ [\sigma_n] &= 400 \text{ K N/m}^2 \end{aligned}$$

图4 弹性地基中的桩基拉拔

上, $\underline{S}_c$ 与 $\underline{S}_s$ 具有相同的值, 这时矩阵 $\underline{T}$ 为单位矩阵。根据 (8) 式, 接触应力 $\underline{t}_c$ 得不到改善。

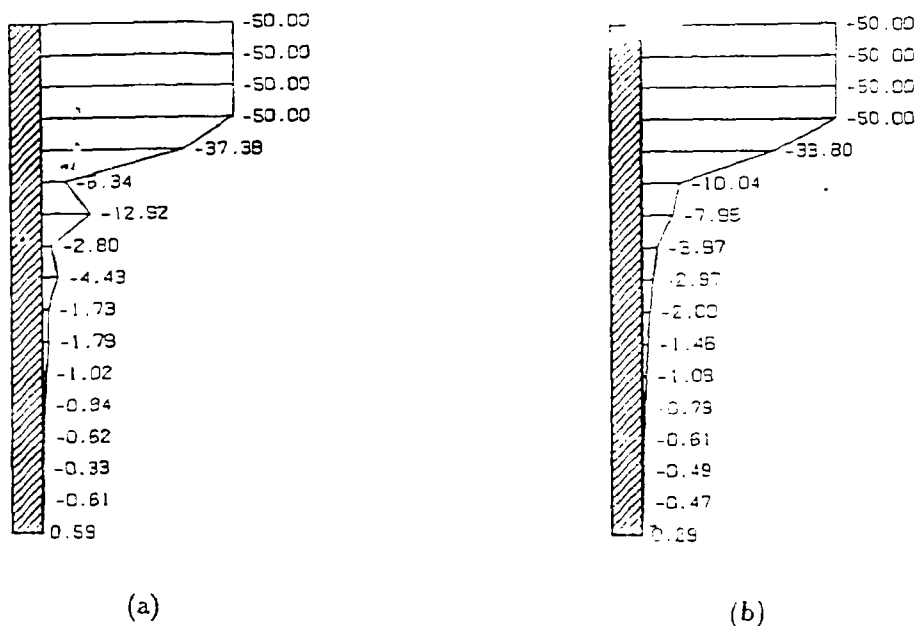


图5 (a) 高斯积分时的接触剪应力

(b) 牛顿-柯特斯积分时的接触剪应力

当采用牛顿-柯特斯数值积分于接触摩擦单元时, $\underline{S}_c$ 与 $\underline{S}_s$ 相差很大,

分别为

$$\underline{S}_c = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{S}_s = \frac{L}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中: L 为单元接触边界长度。

为了研究矩阵 $\underline{T}$ 对应力的平滑作用, 分别将分布面力 $\underline{t}_c$ 和 $\underline{t}_s$ 按矩阵 $\underline{T}$ 特征矢量的基展开成

$$\hat{\underline{t}}_c = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^t \underline{V}_k \quad (12)$$

$$\hat{\underline{t}}_c = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^t \underline{V}_k \quad (13)$$

其中: $\underline{V}_k$ 为矩阵 $\underline{T}$ 的特征矢量, α_k^t 和 α_k^t 为相应的展开系数。

定义

$$\alpha_k^t = \lambda_k \alpha_k^t \quad (14)$$

其中: λ_k 称为放大系数, 因为它起着对分布面力放大和压缩的作用。实际上, λ_k 即是对应于特征向量 $\underline{V}_k$ 的特征值。

将 (14) 式代入 (12) 中, 得

$$\hat{\underline{t}}_c = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \alpha_k^t \underline{V}_k \quad (15)$$

注意到, 上述接触应力表达式中的 λ_k 对接触应力起着平滑作用。

运用 (8), (13) 和 (15) 三式, 即可得到下列特征方程

$$(\underline{T} - \lambda \underline{I}) \underline{V} = 0 \quad (16)$$

其中: $\underline{I}$ 为单位矩阵。

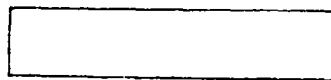
解上述特征方程, 得到特征值和相应的特征向量如下

$$\lambda_1 = \frac{2}{5}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 \quad (17)$$

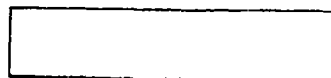
$$\underline{V}_1 = \{1, -0.5, 1\}^T, \underline{V}_2 = \{1, 1, 1\}^T, \underline{V}_3 = \{1, 1, 1\}^T \quad (18)$$



(a) $\lambda_1 = 2/5$



(b) $\lambda_2 = 1$



(c) $\lambda_3 = 1$

图 6 给出了矩阵 $\underline{T}$ 的三个特征值及相应的模态。

根据接触应力的计算式 (15), 从图中可见, 模态 2 和 3, 由于其特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的缘故, 对接触应力平滑

不起作用。而模态 1, 由于其特征值 $\lambda_1 = \frac{2}{5} < 1$, 则受到抑制。

在前面给出的两个例子中, 接触应力的振荡形式与模态 1 颇相似 (见图 2 和图 5 (a))。因此, 当

采用牛顿-柯特斯数值积分方案时, 引起应力振荡的主要模态受到了抑制, 从而达到平滑应力的目的。

图 6 特征值和特征向量

4 结论与讨论

根据以上特征值分析, 可以得出结论, 高斯数值积分插值函数矩阵(2)是造成接触应力振荡的原因, 采用牛顿—柯特斯数值积分能够消除应力振荡现象。

应当注意, 对插值函数矩阵(2)采用三点高斯积分等价于对其进行精确积分。因此, 精确积分插值函数矩阵也将引起接触应力振荡。另外, 大量的计算显示, 当采用牛顿—柯特斯数值积分代替高斯数值积分时, 数值解的收敛性有所降低, 但影响是微小的。

参 考 文 献

- [1] G. Swoboda, X. Y. Lei, Simulation of tunnel excavation with contact friction interface element, International symposium on Application of Computer Methods in Rock Mechanics and Engineering, ACMIRME93 Xian, China, 1993. 5
- [2] R. E. Goodman, R. L. Taylor and T. L. Brekke, A model for mechanics of jointed rock, Journal of soil Mech. and Foundation, ASCE94, 19—43 (1968)
- [3] G. Swoboda, H. Ebber, S. J. Wang and J. M. Zhang, Application of the "decoupled finite element analysis" in tunnelling, Proc. of the 6th Int. Conf. on Num. Methods in Geom. Innsbruck (1988).
- [4] M. G. Katona, A simple contact friction interface element with applications to buried culverts, Int. J. Num Anal. Meth. Geomech., 7, 371—384 (1983)
- [5] H. Van Langen, Numerical analysis of soil—structure interaction, Dissertation, Delft University of Technology (1991)
- [6] J. Hohberg, A note on spurious oscillations in FEM joint elements, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 19, 773—779 (1990)
- [7] J. C. J. Schellekens and R. de Borst, On the numerical integration of interface elements, Int. J. for Num. Meth. Eng. (to be published)
- [8] 雷晓燕 接触摩擦单元理论及其在模拟隧道开挖中的应用, 华东交通大学学报, 1993; 10 (1)

Method of Eliminating Stress Oscillations in the Contact Friction Element

Lei Xiaoyan Wang Wuquan

ABSTRACT

In the paper, stress oscillations in contact friction element presented in reference [1] is discussed by using eigenvalue analysis in the contact friction element, the stress oscillations are observed in the area where large stress gradients exist over interface. Exact integration or the conventional Gauss integration scheme used to evaluate the interpolation function matrix of the interface element was found to be the source of the oscillations. Whereas the Newton—Cotes integration scheme can eliminate the stress oscillation.

key words: Stress oscillation; Contact element