

两类图的优美性与和谐性

邓 毅 雄

(基础课部)

摘 要

本文讨论了图 $M(s, t)$ (道路 P_s 的两端点与 K_t 相联所得到的图) 和图 $S_m + K_1$ 的优美性与和谐性。

关键词: 优美性; 和谐性; 标号函数

0 引 言

研究图的优美性与和谐性是图论的有趣课题, 但由于缺乏具有一般性的研究手段, 寻找具有优美性 (或和谐性) 的图类仍是这个领域目前的研究重点。

设 $G = (V, E)$ 是简单图, 下面先给出图 G 的优美性与和谐性定义。

对图 G , 若存在函数

$$f: V \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$$

满足:

(1) $\forall u, v \in V$, 若 $u \neq v$, 则 $f(u) \neq f(v)$

(2) $\omega(e) \longrightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$, 其中 $\omega(e) = |f(u) - f(v)|$, ($e = uv \in E$);

(3) $\forall e', e'' \in E$, 若 $e' \neq e''$, 则 $\omega(e') \neq \omega(e'')$, 则称图 G 是优美图, 其中 f 称为标号函数, $f(v)$ 称为点 v 的优美标号, $\omega(e)$ 称为边 e 的优美值 (或权)。

设 A, B 是两整数集, 若 A 中元素关于整数 q 取模恰得到 B , 则记为 $A \xrightarrow{\text{mod}(q)} B$ 。这样我们可以给出图 G 的和谐性定义:

对图 G , 若存在函数

$$h: V \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|-1\}$$

满足:

(1) $\forall u, v \in V$, 若 $u \neq v$, 则 $h(u) \neq h(v)$;

(2) $\{\omega'(e) \mid \omega'(e) = h(u) + h(v), \text{ 其中 } e = uv \in E\} \xrightarrow{\text{mod}(q)} \{0, 1, 2, \dots, |E|-1\}$;

本文于 1993 年 4 月 2 日收到

(3) $\forall e', e'' \in E$, 若 $e' \neq e''$, 则 $\omega'(e') \neq \omega'(e'') \pmod{(|E|)}$, 则称图 G 是和谐图, 其中 $h(v)$ 称为点 v 的和谐标号, $\omega'(e)$ 称为边 e 的和谐值 (关于 $|E|$ 的模的意义下)。

有些图既有优美性又有和谐性 (参阅 [1]), 本文讨论了两类图的优美性与和谐性, 其中图 $S_m + K_1$ 的和谐性是文 [1] 的一个猜想。

用 K_n 、 P_n 、 S_{n-1} 分别表示阶数为 n 的完全图、道路和星图, $\bar{G}$ 表示图 G 的补图, 而文中其他未定义概念参照 [4]。我们用 $M(s, t)$ ($s \geq 1, t \geq 0$) 表示道路 P_s 的端点与 K_t 相联所得到的图。当 $t=0$ 时, $M(s, t)$ 仍为 P_s , 当 $s=1$ 时, $M(s, t)$ 为星图 S_t 。注意到毛虫树 (移去它的所有悬挂点得到一条道路的树) 既是优美图又是和谐图, 而道路与星图显然是毛虫树, 故它们都是优美图与和谐图。关于树的和谐性定义也参阅 [1], 这里不介绍。下面我们只考虑 $s \geq 2, t \geq 1$ 的情况, 此时

$|V|=s+t, |E|=s+2t-1, M(s, t)$ 如图 1 所示。

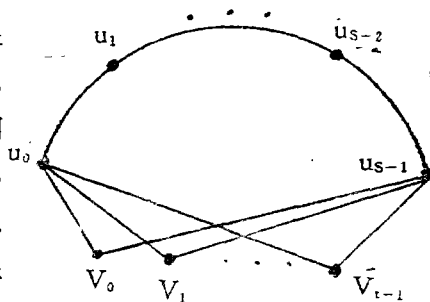


图 1

1 $M(s, t)$ 的优美性

我们知道, 若图 G 的点均为偶数度点, 则 G 是优美图的必要条件是 $|E| \equiv 0$ 或 $3 \pmod{4}$ 。故当 $t=2n+1, s=4m$ (或 $s=4m+1$) 时, $M(s, t)$ 都不是优美图。但我们可以证明除上述情况外, $M(s, t)$ 都是优美图。(以下 m, n 为正整数, V, E 分别表示 $M(s, t)$ 的点集与边集)。

先给出四个引理:

引理 1 若道路 P_{4m} ($m \geq 1$) 的两端点已标号 0 与 2 , 则其余 $4m-2$ 个点必能从整数集 $\{3, 4, \dots, 4m+1\}$ 中选取不同的数作标号, 使得所有边的权恰为集 $\{1, 2, \dots, 4m-1\}$ 。

证明 设 P_{4m} 的 $4m$ 个点依次为 $u_0, u_1, \dots, u_{4m-1}$, 则可以验证如下标号满足要求:

$$f(u_0)=2, \quad f(u_{4m-1})=0,$$

当 i 为偶数时

$$f(u_i)=2+i/2 \quad (i=2, 4, \dots, 4m-2)$$

当 i 为奇数时

$$f(u_i)=\begin{cases} (4m-i-3)/2, & i=1, 3, \dots, 2m-3 \\ (4m-(i-1))/2, & i=2m-1, \dots, 4m-3 \end{cases}$$

证毕!

完全类似地可证:

引理 2 若道路 P_{4m+1} ($m \geq 1$) 的两端点已标号 0 与 2, 则其余 $4m-1$ 个点必能从整数集 $\{3, 4, \dots, 4m+2\}$ 中选取不同的数作标号, 使得所有边的权恰为集 $\{1, 2, \dots, 4m\}$.

引理 3 若道路 P_{4m+t} 的两端点已标号 0 与 $2m+t+1$ ($m \geq 1, t \geq 1$), 则其余 $4m$ 个点必能从整数集 $\{1, 2, \dots, 2m+t, 2m+t+2, \dots, 4m+t+1\}$ 中选取不同数作标号, 使所有边的权恰为集 $\{1, 2, \dots, 2m\} \cup \{2m+t+1, 2m+t+2, \dots, 4m+t+1\}$.

证明 设 P_{4m+t} 的点依次为 $u_0, u_1, \dots, u_{4m-1}$, 可以验证如下标号满足要求:

$$f(u_0) = 0, \quad f(u_{4m-1}) = 2m+t+1$$

当 i 为奇数时

$$f(u_i) = 4m+t-(i-3)/2 \quad i=1, 3, \dots, 4m-1$$

当 i 为偶数时

$$f(u_i) = \begin{cases} i/2, & i=2, 4, \dots, 2m \\ t+i/2, & i=2m+2, \dots, 4m \end{cases}$$

证毕!

类似引理 3 可证:

引理 4 若道路 P_{4m+t} 的两端点已标号 0 与 $2m+t+1$ ($m \geq 1, t \geq 1$), 则其余 $4m+1$ 个点必能从整数集 $\{1, 2, \dots, 2m+t, 2m+t+2, \dots, 4m+t+2\}$ 中选取不同的数作标号, 使所有边的权恰为集 $\{1, 2, \dots, 2m+1\} \cup \{2m+t+2, 2m+t+3, \dots, 4m+t+2\}$.

下面借助引理 1—4, 我们证明 $M(s, t)$ 的优美性.

定理 1 当 $s=4m, t=2n$ 时, $M(s, t)$ 是优美图.

证明 此时 $|E|=4(m+n)-1$, 设

$$f: V \longrightarrow \{0, 1, \dots, |E|\}$$

满足: $f(u_0) = 2, f(u_{4m-1}) = f(u_{4m-1}) = 0$, 而点 u_j ($j=1, 2, \dots, 4m-2$) 按引理 1 的标号法标号;

$$f(v_0) = |E| = 4(m+n) - 1,$$

$$f(v_1) = f(v_0) - 1 = 4(m+n) - 2,$$

若 $f(v_{2i-2})$ 已标号, 则

$$f(v_{2i}) = f(v_{2i-2}) - 4 = 4(m+n-i) - 1,$$

$$f(v_{2i+1}) = f(v_{2i}) - 1 = 4(m+n-i) - 2, \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

可以验证此时 u_0, u_{4m-1} 与 v_i ($i=0, 1, \dots, 2n-1$) 相联所构成的边的权恰为集 $\{4m, 4m+1, \dots, 4(m+n)-1\}$. 事实上, 设

$$S_i = \{\omega(u_0 v_{2i+1}), \omega(u_0 v_{2i}), \omega(u_{4m+1} v_{2i-1}), \omega(u_{4m-1} v_{2i})\}, \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

则

$$S_i = \{4(m+n-i) - 4, 4(m+n-i) - 3, 4(m+n-i) - 2, 4(m+n-i) - 1\} \\ (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

设 $S = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i$, 由于 $\min S_i = 4(m+n-i) - 4 = \{4[m+n-(i+1)] - 1\} + 1 = \max S_{i+1} + 1$, 又 $\max S = \max S_0 = 4(m+n) - 1 = |E|$, $\min S = \min S_{n-1} = 4m$, 故 S 恰取到从 $4m$ 到 $4(m+n) - 1$ 的连续整数, 即 $S = \{4m, 4m+1, \dots, |E|\}$.

又由引理 1 知, 其它边的权恰为集 $\{1, 2, \dots, 4m-1\}$, 注意到各点的标号显然不同, 所以 f 是优美标号, $M(4m, 2n)$ 是优美图. 证毕!

图 2 所示为 $m=2, n=3$ 时, $M(8, 6)$ 在上述标号法下的优美标号.

应用引理 2 完全类似定理 1 可以证明:

定理 2 当 $s=4m+1, t=2n$ 时, $M(s, t)$ 是优美图.

定理 3 当 $s=4m+2$ 时, $M(s, t)$ 是优美图.

证明 此时 $|E|=4m+2t+1$, 当 $m=0$ 时, $M(2, t)$ 即为 $P_2 + K_t$, 是 $P_t + K_1$ 的特例, 其优美性已由 [2] 证明. 当 $m \geq 1$ 时, 设

$$f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, |E|\}$$

满足 $f(u_0) = 0, f(u_{s-1}) = f(u_{4m+1}) = 2m+t+1$, 而点 $u_j (j=1, 2, \dots, 4m)$ 按引理 3 的标号法标号;

$$f(v_i) = |E| - i = 4m+2t-i+1, \quad (i=0, 1, \dots, t-1)$$

显然各点的标号互不相同, 且可证此时 u_0, u_{4m+1} 与 $v_i (i=0, 1, \dots, t-1)$ 相联所构成边的权恰为集 $\{2m+1, 2m+2, \dots, 2m+t\} \cup \{4m+t+2, 4m+t+3, \dots, 4m+2t+1\}$. 事实上, 设

$$S_1 = \{\omega(u_{4m-1} v_i) \mid i=0, 1, \dots, t-1\},$$

$$S_2 = \{\omega(u_0 v_i) \mid i=0, 1, \dots, t-1\},$$

易知 $S_1 = \{2m+1, 2m+2, \dots, 2m+t\},$

$$S_2 = \{4m+t+2, 4m+t+3, \dots, 4m+2t+1\}.$$

又由引理 3 知, 其它边的权恰为集 $S_3 = \{1, 2, \dots, 2m\} \cup \{2m+t+1, 2m+t+2, \dots, 4m+t+1\}$, 从而 $\omega(e) \rightarrow S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{1, 2, \dots, |E|\} (e \in E)$, 显然不同边有不同权, 所以 f 是优美标号, $M(4m+2, t)$ 是优美图. 证毕!

图 3 为当 $m=1, t=5$ 时 $M(6, 5)$ 在上述标号法下的优美标号.

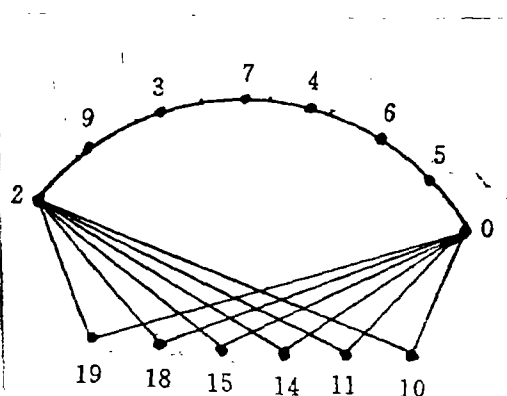


图 2

对 $s=4m+3$ 的情况可应用引理 4 并仿照定理 3 证得:

定理 4 当 $s=4m+3$ 时, $M(s, t)$ 是优美图.

由定理 1—4 看到, 除不满足必要条件的情况外, $M(s, t)$ 都是优美图. 当 $s=n-1, t=1$ 时, $M(s, t)$ 即为圈 C_n , 故 C_n 的优美性仅是 $M(s, t)$ 优美性的特例.

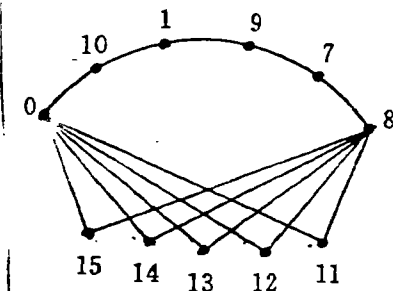


图 3

2 $M(s, t)$ 的和谐性

关于 $M(s, t)$ 的和谐性我们有:

定理 5 当 $s=4m$ 时, $M(s, t)$ 是和谐图.

定理 6 当 $s=4m+2$ 时, $M(s, t)$ 是和谐图.

由于这两个定理的证明方法完全类似, 这里只证定理 5.

定理 5 的证明 此时 $|E|=4m+2t-1$, $M(s, t)$, 仍如图 1 所示. 设

$$h: V \longrightarrow \{0, 1, \dots, |E|-1\}$$

$$\text{满足: } h(u_i) = |E| - i - 1 = 4m + 2t - i - 2 \quad (i=0, 1, \dots, 4m-1)$$

$$h(v_j) = 2j \quad (j=0, 1, \dots, t-1)$$

可以验证以上标号满足和谐性定义. 事实上, 首先看到 $\min \{h(u_i)\} = h(u_{4m-1}) = 2t-1$, $\max \{h(v_j)\} = h(v_{t-1}) = 2t-2$, 即 $\min \{h(u_i)\} = \max \{h(v_j)\} + 1$. 且 u_i ($i=0, 1, \dots, 4m-1$) 各点标号显然不同, v_j ($j=0, 1, \dots, t-1$) 之间也是如此, 所以各点标号互不相同.

又设

$$S_1 = \{\omega'(u_i u_{i+1}) \mid i=0, 1, \dots, 4m-2\},$$

$$S_2 = \{\omega'(u_0 v_j) \mid j=0, 1, \dots, t-1\},$$

$$S_3 = \{\omega'(u_{4m-1} v_j) \mid j=0, 1, \dots, t-1\},$$

显然 $|S_1|=4m-1$, $|S_2|=|S_3|=t$.

由于 $\omega'(u_i u_{i+1}) = h(u_i) + h(u_{i+1}) = 8m + 4t - 2i - 5$ 为奇数, $\max S_1 = 8m + 4t - 5$, $\min S_1 = 4t - 1$, 且 $\omega'(u_i u_{i+1}) = \omega'(u_{i+1} u_{i+2}) + 2$, 故 S_1 连续地取到从 $4t-1$ 到 $8m+4t-5$ 的所有奇数, 即 $S_1 = \{4t-1, 4t+1, \dots, 8m+4t-5\}$;

同样可以求得: $S_2 = \{4m+2t-2, 4m+2t, \dots, 4m+4t-4\}$ 即连续地取到从 $4m+2t-2$ 到 $4m+4t-4$ 的所有偶数; $S_3 = \{2t-1, 2t+1, \dots, 4t-3\}$ 即连续地取到从 $2t-1$ 到 $4t-3$ 的所有奇数.

那么, $S_1 \cup S_3 = \{2t-1, 2t+1, \dots, 8m+4t-5\}$ 即连续地取到从 $2t-1$ 到 $8m+4t-5$ 的

所有奇数, $S_1 \cup S_3 \xrightarrow{\text{mod}(|E|)} \{2t-1, 2t+1, \dots, 4m+2t-3, 0, 2, 4, \dots, 4m+2t-4\}$, $S_2 \xrightarrow{\text{mod}(|E|)} \{4m+2t-2, 1, 3, \dots, 2t-3\}$, 从而, $\{\omega'(e) \mid \omega'(e) = h(u) + h(v), e = uv \in E\} = \bigcup_{i=1}^3 S_i \xrightarrow{\text{mod}(|E|)} \{0, 1, 2, \dots, |E|-1\}$, 显然不同边的和谐值是不相同的, 因此 h 是和谐标号, $M(4m, t)$ 是和谐图. 证毕!

图 4 是当 $m=2, t=7$ 时 $M(8, 7)$ 在上述标号法下的和谐标号.

3 $S_m + K_1$ 的和谐性

文 [3] 已经证明了图 $S_m + K_1$ 是优美图, 而文 [1] 猜想 $S_m + K_1$ 也是和谐图. 这里我们证实了这个猜想, 事实上,

定理 7 $S_m + K_1$ 是和谐图.

证明 如图 5, $S_m + K_1$ 共有 $2m+1$ 条边, 设

$$h: V(S_m + K_1) \rightarrow \{0, m, m+1, \dots, 2m\}$$

满足: $h(u_0) = 0$

$$h(u_1) = m$$

$$h(v_j) = 2m - j + 1 \quad (j=1, 2, \dots, m).$$

以上标号是和谐标号. 事实上, 设 $S_i = \{\omega'(u_i v_j) \mid$

$\omega'(u_i v_j) = h(u_i) + h(v_j), j=1, 2, \dots, m\} (i=0, 1)$, 则 $\max S_0 = 2m$, $\min S_0 = m+1$, 且 S_0 连续地取到从 $m+1$ 到 $2m$ 的整数, 即 $S_0 = \{m+1, m+2, \dots, 2m\}$; 同理 $S_1 = \{2m+1, 2m+2, \dots, 3m\}$; 又 $\omega'(u_0 u_1) = m$, 故得到 $S_m + K_1$ 所有边的和谐值为 $S_0 \cup S_1 \cup \{\omega'(u_0 u_1)\} = \{m, m+1, \dots, 3m\} \xrightarrow{\text{mod}(2m+1)} \{0, 1, \dots, 2m\}$. 并且显然各边和谐值互不相同, 各点标号也互不相同, 所以 h 是和谐标号, $S_m + K_1$ 是和谐图. 证毕!

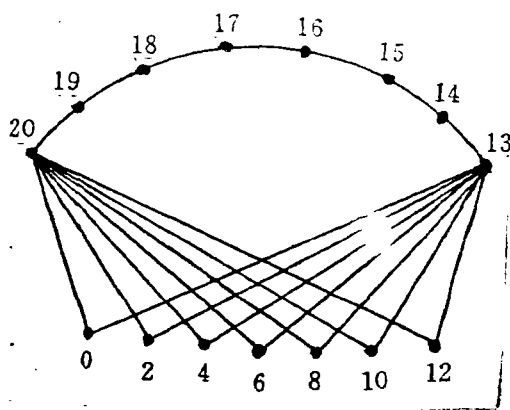


图 4

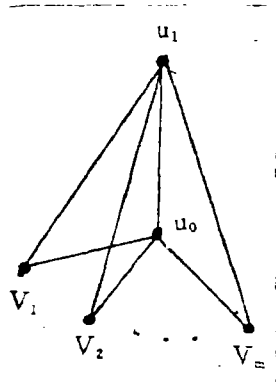


图 5

参 考 文 献

- [1] J. A. Gallian, A Survey:Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labeling Graphs. J. Graph Theory, 1989(4), 491—504 .
- [2] T. Grace, On Sequential Labelings of Graphs. J. Graph Theory, 1983(7), 195—201
- [3] S. P. Rao Hebbare, Graceful Cycles. Utilitas Math. 1976(10), 307—317.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications. North—Holland, New York (1976).

The Gracefulness and Harmoniousness of Two Classes of Graphs

Deng Yixiong

ABSTRACT

This psper is studying the gracefulness and harmoniousness of $M(s,t)$ and $S_m + K_1$.

Key words: Gracefulness; Harmoniousness; Labeling function