

人口方程一解的存在性、稳定性

龚代华

(基础课部)

摘 要

本文建立了关于出生人口数的数学模型,分别给出了解有界、渐近稳定的条件,并指出了实现最佳人口的方法、速度。

关键词:出生率;死亡率;分布函数;渐近稳定性;控制速度

在文〔1〕中建立了如下人口模型,

$$\begin{cases} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} + \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = -\mu(r,t)P(r,t) \\ P(0,t) = \varphi(t) \\ P(r,0) = P_0(r) \end{cases} \quad (1)$$

这里 $P(r,t)$ 是 t 时刻人口按年龄 r 的分布函数, $\mu(r,t)$ 是 t 时刻年龄为 r 之人的死亡率, $P_0(r)$ 是 0 时刻按年龄 r 的分布函数, $\varphi(t)$ 是 t 时刻出生的人口数。

方程 (1) 是个带有反馈的闭环人口控制模型,由于 t 时刻出生的人口数是由 t 时刻人口分布函数 $P(r,t)$ 、妇女比例函数、生育模式、生育率决定,故在此模型中。

$$\varphi(t) = \beta(t) \int_{a_1}^{a_2} k(r,t)h(r,t)p(r,t)dr \quad (2)$$

其中: $k(r,t)$ — t 时刻年龄为 r 的妇女比例函数, 约为 $\frac{1}{2}$, 是一个非负连续函数。

$h(r,t)$ ——发育模式, 非连续且 $\int_{a_1}^{a_2} h(r,t) dr = 1$

$\beta(t)$ —— t 时刻妇女生育率

$[a_1, a_2]$ ——妇女育龄区间

将 $h(r,t)$ 扩充到 $(-\infty, \infty)$ 上

$$h(r,t) = 0 \quad r \in (-\infty, a_1) \cup (a_2, +\infty)$$

本文于 1993 年 6 月 26 日收到

则 (2) 变为

$$\varphi(t) = \beta(t) \int_0^{-\infty} k(r, t) h(r, t) p(r, t) dr \quad (3)$$

在文 [2] 中 Olsder 有特征线方法求出了 (1) 的古典解

$$p(r, t) = \varphi(t-r) e^{-\int_0^{\mu(t, t-r)} \alpha} + P_0(t-r) e^{-\int_{-r}^{\mu(t, t-r)} \alpha} \quad (4)$$

由 (3), (4) 有

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \varphi(t-r) m(r, t) e^{-\int_0^{\mu(t, t-r)} \alpha} dr \\ &\quad + \int_0^{\infty} m(r, t) P_0(r-t) e^{-\int_{-r}^{\mu(t, t-r)} \alpha} dr \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $m(r, t) = \beta(t) k(r, t) h(r, t)$

令

$$Z(t) = \int_t^{\infty} m(r, t) P_0(r-t) e^{-\int_{-r}^{\mu(t, t-r)} \alpha} dr \quad (6)$$

则 (5) 变为

$$\varphi(t) = \int_0^t m(r, t) \varphi(t-r) e^{-\int_0^{\mu(t, t-r)} \alpha} dr + Z(t) \quad (7)$$

考虑 t 时刻的移民对人口的影响, 必须加入一项 $R(t)$, $R(t) > 0$ 表明移入的多于移出的, $R(t) < 0$ 则相反。通常 $|R(t)|$ 远小于 $Z(t)$, 这是因为移民所占比例一般很小, 这样模型 (7) 变为

$$\varphi(t) = Z(t) + R(t) + \int_0^t \varphi(t-r) m(r, t) e^{-\int_0^{\mu(t, t-r)} \alpha} dr \quad (8)$$

(8) 即为描述出生人口规律的数学模型。众所周知, 要控制人口数量, 只有控制出生人口数量及移民数量, 因此这个模型对于人口控制具有较大意义。

下面说明一定条件下方程 (8) 解的存在性、非负性、有界性、稳定性。

定理 1 存在 $[0, +\infty]$ 上的连续函数 $\varphi(t)$ 满足 (8), 且 $\varphi(t) > 0$ 。

证 将 (8) 变形为

$$\varphi(t) = Z(t) + R(t) + \int_0^t m(t-r) \varphi(r) e^{-\int_0^t \beta(\xi, t-r) d\xi} dr$$

因 $\beta(t)$ 是有界函数, 设 $0 < \beta(t) \leq M$, 而 $0 \leq h(r, t) < 1$, $0 < k(r, t) < 1$, 故 $m(t-r, t) \leq M$.

任取数 $A > 0$, 作变换 $T: C[0, A] \rightarrow C[0, A]$

$$T(\varphi)(t) = Z(t) + R(t) + \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^t \beta(\xi, t-r) d\xi} \varphi(r) dr$$

任取 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[0, A]$

$$|T(\varphi)(t) - T(\varphi_1)(t)| \leq \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^t \beta(\xi, t-r) d\xi} |\varphi_2(r) - \varphi_1(r)| dr \leq Mt \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

易证

$$|T^n \varphi(t) - T^n \varphi_1(t)| \leq \frac{M^n t^n}{n!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

选取 n_0 , 使 $\rho = \frac{M^n t^n}{n!} < 1$

则

$$\|T^{n_0} \varphi_2 - T^{n_0} \varphi_1\| \leq \rho \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

故存在^[2]唯一的 $\varphi \in C[0, A]$ 使 $T^{n_0} \varphi = \varphi$, 由唯一性有 $T\varphi = \varphi$.

再取, $A_1 > A$, 则必有唯一的 $\varphi_1(t) \in C[0, A_1]$ 于是

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) \quad t \in [0, A]$$

且

$$\lim_{t \rightarrow A^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow A^-} \varphi_1(t) = \varphi(A)$$

故可将 $\varphi(t)$ 连续地, 唯一地延拓到整个 $[0, +\infty)$ 上.

$$Z(t) + R(t) > 0, \varphi(0) = Z(0) = R(0) = n_0 + R(0) > 0$$

若 $\varphi(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上不是非负的, 则必存在 t_m, T 满足

$$\varphi(t) > 0 \quad t \in [0, t_m)$$

$$\varphi(t) < 0 \quad t \in (t_*, T)$$

由 $\varphi(t)$ 的连续性有: $\varphi(t_*) = 0$

$$0 = \varphi(t) = z(t_*) = z(t_*) + \int_0^{t_*} m(t_* - r, t_*) \varphi(r) e^{-\int_0^r \mu(t_*, t_* + r) dr} dr$$

故 $\varphi(t) > 0$.

一般说来 (8) 的解 $\varphi(t)$ 在整个 $[0, +\infty)$ 上不一定有界, 这意味着人口将连续发展, 直到超过地球所能养活的人口数. 于是人们为了生存不得不争夺生存空间, 这必将导致战争、瘟疫、饥荒, 使大量人口非正常死亡, 从而破坏了这个正常的人口模型. 因此模型至此已不再适合, 人口控制的使命就是要避免发生这种惨况, 要做到这点只有降低人口发展速度, 这就需要对 $m(r, t)$ 进行控制.

定理 2 若 $m(r, t)$ 满足

$$\int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^{t-r} \mu(t, t+r) dr} dr \leq \rho_0 < 1$$

则存在 $\varphi \in C[0, +\infty]$ 满足 (8)

证

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_t^\infty m(r, t) p_0(r-t) e^{-\int_{r-t}^r \mu(t, t+r) dr} dr \\ &= \int_0^\infty m(r+t, t) p_0(r) e^{-\int_{r-t}^r \mu(t, t+r) dr} dr \end{aligned}$$

因为存在 $b > 0$, 满足 $\mu(r, t) \geq b$

故 $z(t) \leq M n_0 e^{-bt}$, 于是 $z(t) \in C[0, +\infty]$

因而 $R(t) \in C[0, +\infty)$

记 $L = \|z(t) + R(t)\|$, 取 $B = \frac{L}{1-P_0}$

考虑 $C[0, +\infty)$ 的子集合

$$C_B[0, +\infty) = \{\varphi: \varphi \in C[0, +\infty), \|\varphi\| \leq B\}$$

定义映射 $T: C_B[0, +\infty) \rightarrow C[0, +\infty)$

$$T(\varphi)(t) = z(t) + T(t) + \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^{t-r} m(t, t+r) dr} \varphi(r) dr$$

$$|T(\varphi)(t)| \leq \|z + R\| + \|\varphi\| \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^{t-r} m(t, t+r) dr} \varphi(r) dr$$

$$\leq L + P_0 \|\varphi\| \leq B$$

于是 $\|T\varphi\| \leq B$, $T: C_B[0, +\infty) \rightarrow C_B[0, +\infty)$

故存在唯一的 $\varphi \in C_B[0, +\infty)$, 满足 $T\varphi = \varphi$, 即

$$\varphi(t) = z(t) + T(t) + \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^{t-r} m(t, t+r) dr} \varphi(r) dr$$

定理 3 记 $F(r, t) = m(t-r, t) e^{-\int_0^{t-r} m(t, t+r) dr}$

若 $\frac{\partial F(r, t)}{\partial r} < 0$ $\omega(t) = \int_0^{+\infty} F(r, t) dr \leq P_0 < 1$

则 $\varphi(t)$ 渐近稳定

证 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$

$\frac{\partial F(r, t)}{\partial r} < 0$ 故 $\omega(t)$ 单调下降

而 $0 \leq \omega(t) \leq P_0$, 因此 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$ 存在

任取 $t_1 > t_2 > 0$

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) - \varphi(t_2) &= z(t_2) - z(t_1) + R(t_2) - R(t_1) \\ &\quad + \int_0^{t_1} F(r, t_2) \varphi(r) dr - \int_0^{t_1} F(r, t_1) \varphi(r) dr \\ &= z(t_2) - z(t_1) + R(t_2) - R(t_1) + \int_0^{t_1} [F(r, t_2) - F(r, t_1)] \varphi(r) dr \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) \varphi(r) dr \\ | \varphi(t_1) - \varphi(t_2) | &\leq | z(t_2) - z(t_1) | + | R(t_2) - R(t_1) | \\ &\quad + \int_0^{t_1} [F(r, t_1) - F(r, t_2)] \varphi(r) dr + \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) \varphi(r) dr \\ &\leq | z(t_2) - z(t_1) | + | R(t_2) - R(t_1) | + \|\varphi\| \int_0^{t_1} [F(r, t_1) - F(r, t_2)] dr \\ &\quad + \|\varphi\| \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) \varphi(r) dr \end{aligned}$$

$$\leq |z(t_2) - z(t_1)| + |R(t_2) - R(t_1)| + \|\varphi\| [\omega(t_1) - \omega(t_2)] + \|\varphi\| \int_{t_1}^{\infty} F(r, t_2) dr +$$

$$\|\varphi\| \int_{t_1}^{\infty} F(r, t_1) dr$$

$$\leq |z(t_2) - z(t_1)| + |R(t_2) - R(t_1)| + \|\varphi\| [\omega(t_1) - \omega(t_2)]$$

$$+ 2\|\varphi\| \int_{t_1}^{\infty} F(r, t_1) dr$$

由于 $\int_{t_1}^{\infty} F(r, t) dr \leq \int_{t_1}^{\infty} F(r, 0) dr$

故 $\int_0^{\infty} F(r, t) dr$ 一致收敛, 于是对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 T , 当 $t_1, t_2 > T$ 时

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \varepsilon$$

故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ 存在

定理 4 若 $\omega(t) \leq \rho_0 < 1$, $\frac{\partial F(r, t)}{\partial \alpha} > 0$

$\int_{t_1}^{\infty} F(r, t) dr$ 一致收敛, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ 存在.

证 $\frac{\partial F(r, t)}{\partial \alpha} > 0$, 故 $\omega(t)$ 单调增.

又 $0 < \omega(t) \leq \rho_0 < 1$, 因此 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$ 存在. 同定理 3, 易证 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ 存在.

定理 5 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ 存在, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(r, t) = \mu_0(r)$ 一致成立. 则 t 时刻人口总数 $n(t)$ 渐近稳定.

$$\begin{aligned} \text{证 } n(t) &= \int_0^{\infty} P(r, t) dr \\ &= \int_0^t \varphi(r-t) e^{-\int_0^{r-t} \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr + \int_t^{\infty} P_0(r-t) e^{-\int_{r-t}^r \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr \\ &= \int_0^t \varphi(r) e^{-\int_0^{r-t} \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr + \int_0^{\infty} P_0(r) e^{-\int_r^{\infty} \mu(\ell, \ell-r) d\ell} dr \\ 0 &\leq \int_0^{\infty} P_0(r) e^{-\int_r^{\infty} \mu(\ell, \ell-r) d\ell} dr \leq \int_0^{\infty} P_0(r) e^{-kr} dr \leq n_0 e^{-kt} \end{aligned}$$

故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} P(r) e^{-\int_r^{\infty} \mu(\ell, \ell-r) d\ell} dr = 0$

设

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \varphi_0$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \varphi(r) e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr - \int_0^t \varphi_0 e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr \right| \\ &= \left| \int_0^t [\varphi(r) - \varphi_0] e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr \right| \\ &\leq \int_0^t |\varphi(r) - \varphi_0| e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr \\ &\leq \int_0^t |\varphi(r) - \varphi_0| e^{-b(r-r_0)} dr \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ 存在 } T_0, \text{ 当 } t > T_0 \text{ 时 } |\varphi(r) - \varphi_0| < \frac{b\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t |\varphi(r) - \varphi_0| e^{-b(r-r_0)} dr &= e^{-bT_0} \int_0^{T_0} |\varphi(r) - \varphi_0| e^{br} dr \\ &\quad + e^{-bt} \int_{T_0}^t |\varphi(r) - \varphi_0| e^{br} dr \\ &\leq e^{-bT_0} \frac{2\|\varphi\|}{b} (e^{bT_0} - 1) + \frac{b\varepsilon}{2} e^{-bT_0} \frac{1}{b} (e^{bt} - e^{bT_0}) \\ &\leq \frac{2e^{-bT_0}\|\varphi\|}{b} e^{bT_0} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\text{取 } T > T_0, \text{ 当 } t > T \text{ 时, } \frac{2e^{-bT_0}\|\varphi\|}{b} e^{bT_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

下面说明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr$ 存在, 设人类最长寿命为 r_m , 则 $t > r_m$ 时 $\mu(r, t) = 1$, 取

$t > r_m$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{r_m} e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+r) d\ell} dr &= \int_0^{r_m} e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr \\ &= \int_0^{r_m} e^{-\int_0^t \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr + \int_{r_m}^t e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr \\ \int_{r_m}^t e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr &= S_{r_m}^t e^{-\int_0^{r_m} \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} - \int_{r_m}^t \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell \\ &= \int_{r_m}^t e^{-\int_0^r \mu(\ell, \ell+t-r) d\ell} dr e^{-(r-r_m)} dr \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $T_1 > r_m$, 当 $t > T_1$ 时

$$\int_{r_m}^{+\infty} e^{-r-r_m} dr < \frac{\varepsilon}{8}$$

取 $t > T_1$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{r_m}^t e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} e^{-r+r_m} dr - \int_{r_m}^t e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} e^{-r+r_m} dr \right| \\
 &= \left| \int_{r_m}^t [e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} - e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell}] e^{-r+r_m} dr \right| \\
 &\leq \left| \int_{r_m}^{T_1} [e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} - e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell}] e^{-r+r_m} dr \right| \\
 &\quad + \left| \int_{T_1}^t [e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} - e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell}] e^{-r+r_m} dr \right| \\
 &\leq \left| \int_{r_m}^{T_1} |e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} - e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell}| dr + \int_{T_1}^t 2e^{-r+r_m} dr \right| \\
 &\leq \int_{r_m}^{T_1} e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} |e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r) - \mu_0(\ell)} d\ell} - 1| dr + \frac{\varepsilon}{4} \\
 &\leq \int_{r_m}^{T_1} |e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r) - \mu_0(\ell)} d\ell} - 1| dr + \frac{\varepsilon}{4}
 \end{aligned}$$

因 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(r, t) = \mu_0(r)$ 一致成立, 故存在 $T_2 > T_1$, 当 $t > T_2$ 时

$$|e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r) - \mu_0(\ell)} d\ell} - 1| < \frac{\varepsilon}{4T_1}$$

故 $t > T_2$ 时

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{r_m}^t e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} dr - \int_{r_m}^t e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} dr \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

同理可证, 存在 $T > T_2$, 当 $t > T$ 时

$$\left| \int_0^{r_m} e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} dr - \int_0^{r_m} e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} dr \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此 $t > T$ 时

$$\left| \int_0^t e^{-\int_0^{\mu(\ell, \ell+t-r)} d\ell} dr - \int_0^t e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} dr \right| < \varepsilon$$

而

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\int_0^{\mu_0(\ell)} d\ell} dr$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} dr + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{r_m}^t e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} e^{-r-r_m} dr \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} dr + e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{r_m}^t e^{-r-r_m} dr \\
&= \int_0^t e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} dr + e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} \int_{r_m}^t e^{-r-r_m} dr \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} dr
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = \varphi_0 \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \mu_0(\tau) d\tau} dr$$

定理 6 若 $\int_0^m (t-r, t) dr \leq \rho_0 < 1$

则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = 0$$

证 $z(t) \leq M n_0 e^{-kt}$

$$0 < R(t) + z(t) < 2M n_0 e^{-kt} \frac{e^{kt}}{L} L e^{-kt}$$

令 $y(t) = R(t) + z(t)$

则

$$\varphi(t) = y(t) + \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^t \mu(\xi, \xi+r) \varphi(r) dr}$$

由定理 2, $\varphi(t) \in C[0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq L e^{-kt} + \int_0^t m(t-r, t) e^{-k(t-r)} \varphi(r) dr \\
&\leq L e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t m(t-r, t) e^{kr} \varphi(r) dr \\
&\leq L e^{-kt} + e^{-kt} \int_0^t m(t-r, t) e^{kr} e^{-k} \left(\int_0^r m(r-u, r) e^{ku} du + L \right) dr \\
&= L e^{-kt} + L e^{-kt} \int_0^t m(t-r, t) dr \\
&\quad + e^{-kt} \int_0^t m(t-r, t) \int_0^r m(r-u, r) e^{ku} \varphi(u) du dr \\
&\leq L e^{-kt} + L e^{-kt} \rho_0 + \int_0^t m(t-r, t) \int_0^r m(r-u, r) e^{ku} \varphi(u) du dr
\end{aligned}$$

用归纳法易证

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &\leq L e^{-k} (1 + \rho_0 + \dots + \rho_0^n) + \\
 &e^{-k} \int_0^t m(t-t_1, t) \int_0^{t_1} m(t_1-t_2, t_2) \dots \\
 &\int_0^{t_{n-1}} m(t_{n-1}-t_n, t_n) e^{k_n} \varphi(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt_1 \\
 &\leq L e^{-k} \frac{1}{1-\rho_0} + \|\varphi\| e^{-k} \int_0^t m(t-t_1, t_1) e^{k_1} e^{-k_1} \int_0^{t_1} m(t_1-t_2, t_2) e^{k_2} e^{-k_2} \\
 &\dots e^{k_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} m(t_{n-1}-t_n, t_n) e^{k_n} e^{-k_n} dt_n \\
 &\int_0^{t_{n-1}} m(t_{n-1}-t_n, t_n) e^{k_n} dt_n \dots dt_1 \\
 &= L e^{-k} \frac{1}{1-\rho_0} + \|\varphi\| \int_0^t m(t-t_1, t_1) e^{k_1} dt_1 \int_0^{t_1} m(t_1-t_2, t_2) e^{k_2} dt_2 \\
 &\dots \int_0^{t_{n-1}} m(t_{n-1}-t_n, t_n) e^{k_n} dt_n \\
 &\leq L e^{-k} \frac{1}{1-\rho_0} + \|\varphi\| \rho_0^n
 \end{aligned}$$

故

$$\varphi(t) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (L e^{-k} \frac{1}{1-\rho_0} + \|\varphi\| \rho_0^n) = L e^{-k} \frac{1}{1-\rho_0}$$

统计表明, 中国育龄妇女比例为 0.485 左右, 取 $k(r, t) = 0.485$

$$\begin{aligned}
 \int_0^t m(t-r, t) dr &= \int_0^t m(r, t) dr \\
 &= \beta(t) \int_0^t 0.485 h(r, t) dr \\
 &= 0.485 \beta(t) \int_0^t h(r, t) dr
 \end{aligned}$$

$$\text{因 } \int_{a_1}^{a_2} h(r, t) dr = 1$$

当 $t > a_1$ 时

$$\int_0^t m(t-r, t) dr = 0.485 \beta(t)$$

$$\text{由 } \int_0^t m(t-r, t) dr \leq 1$$

得 $\beta(t) \leq 2.06$

记 $\beta_c = 2.06$ ——称为临界生育龄

当 $\beta(t) < \beta_c$ 时 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$

如果普遍实行一对夫妇只生一个小孩, 即 $\beta(t) = 1$, 则 $\rho_0 = 0.485$, $\varphi(t) \rightarrow 0$ 的速度是很快。

$$\begin{aligned} n(t) &= \int_0^{\infty} \varphi(r) e^{-\int_0^t m(t, t+r) dr} dr + \int_0^{\infty} P_0(r) e^{-\int_0^t m(t, t-r) dr} dr \\ &\leq e^{-\mu} \int_0^{\infty} \varphi(r) e^{\mu r} dr + n_0 e^{-\mu} \\ &\leq e^{-\mu} \int_0^{\infty} \frac{L}{1-\rho_0} e^{-\mu r} e^{\mu r} dr + n_0 e^{-\mu} \\ &= \frac{L}{1-\rho_0} t e^{-\mu} + n_0 e^{-\mu} \end{aligned}$$

故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = 0$

定理 7 若 $\int_0^{\infty} F(r, t) dr = 1$ 一致成立, $\frac{\partial F(r, t)}{\partial t} < 0$ 当 $r > A$, $t > A$ 时

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(r, t) dr$ 一致收敛于 $f(r) \neq 0$ $0 \leq r \leq A$

则

$$\varphi(t) = y(t) + \int_0^{\infty} F(r, t) \varphi(r) dr \quad (9)$$

有渐近稳定的非负解。

证 $y(t) = z(t) + R(t)$

$$F(r, t) = m(t-r, t) e^{-\int_0^t m(t, t-r) dr} \geq 0$$

易证方程 (9) 的解存在且非负。

$$\int_0^{\infty} F(r, t) dr = 1 \text{ 一致成立}$$

则存在 T_0 , 当 $t > T_0$ 时

$$\int_r^{\infty} F(r, t) dr < \frac{1}{2}$$

由于 $F(r, t) \leq \beta(t) e^{-b(t-r)} \leq M e^{-b(t-r)}$

故 $\sup_{0 \leq t \leq +\infty} \int_0^{T_0} F(r, t) \varphi(r) dr < +\infty$

设 $L_0 = \sup_{0 \leq t \leq +\infty} \left\{ \int_0^{T_0} F(r, t) \varphi(r) dr + y(t) \right\}$

若 $\varphi(t) \in C_0[0, +\infty)$,

则必存在 t_1 满足

$$\varphi(t_1) = kL_0$$

$$\varphi(t_1) \leq kL_0 \quad t \in [0, +t_1)$$

这里取 $k \geq 2$, 可以通过调整 k 即放大 k , 使 $t_1 > T_0$.

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) &= \int_0^{t_1} F(r, t_1) \varphi(r) dr + y(t_1) \\ &= \int_0^{T_0} F(r, t_1) \varphi(r) dr + y(t_1) + \int_{T_0}^{t_1} 0 F(r, t) \varphi(r) dr \\ &\leq L_0 + \|\varphi\| \int_{T_0}^{t_1} F(t, r) dr \\ &\leq L_0 + \frac{k}{2} L_0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } kL_0 \leq L_0 + \frac{k}{2} L_0$$

$$\text{而 } k \geq 2 \quad L_0 \geq 0$$

矛盾, 故 $\varphi(t) \in C_0[0, +\infty)$

$\forall t_2 > t_1 > A$

$$\begin{aligned} |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| &\leq |y(t_2) - y(t_1)| + \left| \int_0^{t_1} [F(r, t_1) - F(r, t_2)] \varphi(r) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) \varphi(r) dr \right| \\ &\leq |y(t_2) - y(t_1)| + \left| \int_A^{t_1} [F(r, t_1) - F(r, t_2)] \varphi(r) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_0^A [F(r, t_1) - F(r, t_2)] \varphi(r) dr \right| + \left| \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) \varphi(r) dr \right| \\ &\leq |y(t_2) - y(t_1)| + \|\varphi\| \int_A^{t_1} [F(r, t_1) - F(r, t_2)] \varphi(r) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr + \|\varphi\| \int_{t_1}^{t_2} F(r, t_2) dr \\
& = |y(t_2) - y(t_1)| + \|\varphi\| \left[\int_0^{t_1} F(r, t_1) dr - \int_0^{t_1} F(r, t_2) dr \right] \\
& \quad + \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr + \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_2) dr \\
& = |y(t_2) - y(t_1)| + \|\varphi\| \left[\int_0^{+\infty} F(r, t_1) dr - \int_0^{+\infty} F(r, t_2) dr \right. \\
& \quad \left. + \int_0^A [F(r, t_1) - F(r, t_2)] dr - \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_1) dr + \int_{t_1}^{+\infty} F(r, \right. \\
& \quad \left. t_2) dr \right] \\
& \quad + \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr + \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_2) dr \\
& \leq |y(t_2) - y(t_1)| + \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr \\
& \quad + \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_2) dr \\
& \quad + \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr + \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_2) dr \\
& = |y(t_2) - y(t_1)| + 2 \|\varphi\| \int_0^A |F(r, t_1) - F(r, t_2)| dr \\
& \quad + \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_1) dr + 2 \|\varphi\| \int_{t_1}^{+\infty} F(r, t_2) dr
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ $\int_0^{+\infty} F(r, t) dr$ 一致收敛,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(r, t) = f(r) \neq 0$ 一致成立 ($0 \leq r \leq A$), 故 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $T > A$, 当 $t_2, t_1 > T$ 时

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < \varepsilon$$

故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$ 存在

由于

$$\begin{aligned}
\varphi(t) & \geq \int_0^t F(r, t) \varphi(r) dr \\
& \leq \int_0^A F(r, t) \varphi(r) dr
\end{aligned}$$

故
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^A F(r, t) \varphi(r) dr$$

$$= \int_0^A f(r) \varphi(r) dr > 0$$

注1 在定理中, 将条件改为

$$\omega(t) = \int_0^{+\infty} F(r, t) dr \leq 1 \text{ 一致成立, 其余不变, 则 } (1) \text{ 成立.}$$

注2 若 $h(r, t)$, $k(r, t)$, $\mu(r, t)$ 只与 r 有关, 记为 $h(r)$, $k(r)$, $\mu(r)$, 则

$$\int_0^{+\infty} F(r, t) dr = \beta(t) \int_0^{+\infty} h(r) k(r) e^{\int_0^r \mu(\xi) d\xi} dr$$

$$\int_0^{+\infty} F(r, t) dr = 1$$

得
$$\beta(t) = \left(\int_0^{+\infty} h(r) k(r) e^{\int_0^r \mu(\xi) d\xi} dr \right)^{-1}$$

$$\approx 2.06$$

$$\beta_\infty = \int_0^{+\infty} h(r) k(r) e^{\int_0^r \mu(\xi) d\xi} dr$$

为另一临界生育率的计算公式。

综合有

$$\beta(t) < \beta_\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = 0$$

$$\beta(t) = \beta_\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \varphi_0 > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} n(t) = \varphi_0 \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^r \mu(\xi) d\xi} dr$$

设理想人口数为 n_1 , 若 $n_0 > n_1$, 则先运行模型

$$(I) \quad \varphi(t) = z(t) + R(t) = \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^r \mu(\xi, t-r) d\xi} \varphi(r) dr$$

$$\int_0^t m(t-r, t) dr \leq \rho_0 < 1$$

根据人口计划, 选择适当的 ρ_0 , 使 $\varphi(t)$ 以规定的速度趋于 0, 此时 $n(t)$ 同速趋于 0, 当 n

(t) 接近 n_1 时, 运行模型

$$I \quad \varphi(t) = z(t) + R(t) = \int_0^t m(t-r, t) e^{-\int_0^r \mu(\xi, t-r) d\xi} dr$$

$$\int_0^{+\infty} m(t-r, t) e^{-\int_0^r \mu(\xi, t-r) d\xi} dr = 1 \text{ 一致成立.}$$

且 $\frac{\partial F(r, t)}{\partial \alpha} < 0, t > A, r > A$

$\lim_{t \rightarrow \infty} F(r, t) = f(r) \quad 0 \leq r \leq A$, 一致成立.

此时 $n(t)$ 在 n_1 附近变化, 此即为理想人口状态.

参 考 文 献

- [1] 宋健, 于景元. 人口控制论. 北京: 科学出版社, 1985: 43—50
- [2] Olsder, G. J. and Strijbos, R. C. W. Population planing, Puocceedings of 7 Th IFIP conference on Optimization Techniques. Modelling and Optimizaton, 1979
- [3] Erwin Kreyszig. Introductory Functional analysis. New York: John wiley & Sons, 1978: 299—303

Population Equatio — Exsistence and Stability

Gong Daihua

ABSTRACT

In this paper. We establish a population mathematical model. And obtain the conditions on which the solution is bounded. Stable. At last. We point out the method of population control.

Key words: Fertility rate; Death rate; Distribution fancement; Stability; Dominated speed