

关于非扩张映象的不动点定理*

盛梅波 董祥南

(基础课部) (江西师范大学)

摘 要

本文给出了定义在星形集上的单值(集值)非扩张映象的几个不动点定理。

关键词: Banach 空间; 非扩张映象; 星形集; 不动点

1 引言与预备知识

设 (X, d) 是一完备的度量空间, $CB(X)$ 表示 X 的非空有界闭子集全体所组成的集合, H 表示 X 中由 d 诱导的 Hausdorff 度量。本文中其它未说明的符号、概念均参见 [1], [8]。

称映象 $T: X \rightarrow X$ 是单值非扩张的, 如果

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad (1)$$

称映象 $T: X \rightarrow CB(X)$ 是集值非扩张的, 若

$$H(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X \quad (2)$$

通常人们研究上述非扩张映象不动点是在 Banach 空间中的有界闭凸集上进行的(见文[1—4]), 是否能在另外一些集上讨论其不动点的存在性呢? 本文就是探讨这一问题的, 证明了定义在星形集上单值、集值非扩张映象的几个不动点定理。

设 E 是线性距离空间, $A \subset E$ 。如果对任意的 $\sigma \in [0, 1]$, 都有 $\sigma A \subset A$, 其中 $\sigma A = \{\sigma x \mid x \in A\}$, 则称 A 是 E 中星形集。

下面的几个命题显然成立。

命题 1 A 是 E 中星形集当且仅当对任意的 $x_0 \in A$ 及 $\sigma \in [0, 1]$ 有 $\sigma x_0 \in A$ 。

命题 2 设 A 是含 θ 元的凸集, 则 A 是星形集。

注 1 若对 E 中凸集 B , $\theta \in B$, 则取定 B 中一点 x_0 , 作 $D = \{x - x_0 \mid x \in B\}$, 于是 D 是含 θ 元的凸集。

2 非扩张映象的不动点定理

引理 1 设 C 是 Banach 空间 X 中的任意非空子集, $T: C \rightarrow CB(C)$, $\lambda > 0$ 为一常数。

本文于 1993 年 6 月 9 日收到

* 江西省自然科学基金资助课题

则:

$$H(\lambda T_x, \lambda T_y) \leq \lambda H(T_x, T_y) \quad \forall x, y \in C \quad (3)$$

证 $\forall u \in T_x, \forall v \in T_y$, 记 $u' = \lambda u, v' = \lambda v$. 则 $u' \in \lambda T_x, v' \in \lambda T_y$ 且

$$\|u' - v'\| = \|\lambda u - \lambda v\| = \lambda \|u - v\|$$

所以对 $\forall v \in T_y$ 有

$$\inf_{b \in \lambda T_y} \{\|u' - b\| \mid u' \in \lambda T_x\} \leq \|u' - v'\| = \lambda \|u - v\|$$

于是再对 $v \in T_y$ 取下确界有

$$\begin{aligned} \inf \{\|u' - b\| \mid u' \in \lambda T_x\} &\leq \lambda \inf \{\|u - v\| \mid v \in T_y\} \\ &= \lambda d(u, T_y) \leq \lambda \sup \{d(u, T_y) \mid u \in T_x\} \leq \lambda H(T_x, T_y) \end{aligned}$$

由于 u' 的任意性可知对 u' 取上确界有

$$\sup \{\inf \{\|u' - b\| \mid b \in \lambda T_y\} \mid u' \in \lambda T_x\} \leq \lambda H(T_x, T_y)$$

即

$$H_-(\lambda T_x, \lambda T_y) \leq \lambda H(T_x, T_y).$$

同理可证

$$H_+(\lambda T_x, \lambda T_y) \leq \lambda H(T_x, T_y)$$

引理 2 设 C 是 Banach 空间 X 中非空有界星形集, $T: C \rightarrow CB(C)$ 是连续的集值映象, 取定序列 $\{\lambda_n\} \subset (0, 1)$ 使 $\lambda_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 构造映象列 $T_n, C \rightarrow CB(C)$, 其中 $T_n x = \lambda_n T x$, $x \in C$, 则当 $x_n \rightarrow x$ 时, 有

$$H(T_n x_n, T x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4)$$

证, 由于 C 是星形集, 故引理中构造的 T_n 都是合理且是 C 到 $CB(C)$ 的映象, 下证 (4) 成立. 对 $\forall u' \in T_n x_n, v \in T x$, 则存在 $u \in T x_n$, 使 $u' = \lambda_n u$, 于是

$$\begin{aligned} \|u' - v\| &= \|\lambda_n u - v\| \leq |\lambda_n - 1| \|u\| + \|u - v\| \\ &\leq M(1 - \lambda_n) + \|u - v\| \end{aligned}$$

其中

$$M = \sup \{\|x\| \mid x \in C\} < +\infty \quad (C \text{ 有界性})$$

故

$$\begin{aligned} \inf \{\|u' - a\| \mid a \in T x\} &\leq \|u' - v\| \\ &\leq M(1 - \lambda_n) + \|u - v\| \quad \forall u' \in T_n x_n, v \in T x \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \inf \{\|u' - a\| \mid a \in T x\} &\leq M(1 - \lambda_n) + \inf \{\|u - a\| \mid a \in T x\} \\ &\leq M(1 - \lambda_n) + H(T x_n, T x) \quad \forall u' \in T_n x_n \end{aligned}$$

再对 u' 取上确界得

$$\sup \{\inf \{\|u' - a\| \mid a \in T x\} \mid u' \in T_n x_n\} \leq M(1 - \lambda_n) + H(T x_n, T x)$$

即

$$H(T_n x_n, T x) \leq M(1 - \lambda_n) + H(T x_n, T x) \quad (5_a)$$

同理

$$H_-(T_n x_n, T x) \leq M(1 - \lambda_n) + H(T x_n, T x) \quad (5_b)$$

又 T 是连续的; 故当 $x_n \rightarrow x$ 时, 有 $H(T x_n, T x) \rightarrow 0$, 注意到 $\lambda_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow +\infty$), 于是在 (5_a), (5_b) 式中让 $n \rightarrow \infty$, 即有

$$H(T_n x_n, T x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \square$$

定理 1 设 C 是 Banach 空间 X 中的非空紧星形集, 映象 $T: C \rightarrow CB(C)$ 是集值非扩张的, 则 T 在 C 中存在不动点.

证 与引理2中一样构造映象列 $T_n: C \rightarrow CB(C)$ 。于是根据引理1及(2)式知 T_n 是具压缩常数 λ_n 的集值压缩映象。又 C 是距离空间 C 的完备子空间, 故由文[1] P₂₅₅定理5.4.3知存在点 $x_n \in C$, 使 $x_n \in T_n x_n$, 又 C 为紧集, 故 $\{x_n\}$ 有收敛子列, 不妨记为 $x_n \rightarrow x_0 \in C$ 。易知

$$d(x_0, Tx_0) \leq d(x_n, x_n) + H(T_n x_n, Tx_0) \quad (6)$$

事实上

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx_0) &= \inf \{d(x_n, y) \mid y \in Tx_0\} \\ &\leq d(x_0, x_n) + \inf \{d(x_n, y) \mid y \in Tx_0\} \\ &\leq d(x_0, x_n) + H(T_n x_n, Tx_0) \end{aligned}$$

又 T 是非扩张, 故 T 是连续的。当 $x_n \rightarrow x_0$, 由引理2知(6)式右端趋于零。这就表明 $d(x_0, Tx_0) = 0$, 即 $x_0 \in Tx_0$, 则 x_0 是 T 在 C 中的不动点, (因为 $x_0 \in C$, $Tx_0 \in CB(C)$, 从而 $Tx_0 \subset C$)。□

推论1 设 C 是 Banach 空间 X 中非空紧星形集, $T: C \rightarrow CB(C)$ 是集值的具 Lipschitz 常数 L ($L > 1$) 的 Lipschitz 映象, 则存在 $x_0 \in C$, 使 $Lx_0 \in Tx_0$ 。

证 令 $S: C \rightarrow CB(C)$: $S(x) = \frac{1}{L}Tx$, $\forall x \in C$ 。由引理1知 S 是非扩张的, 据定理1知 S 在 C 中有不动点 x_0 , 此 x_0 即为所求。

注2 在定理1中, 若 C 中紧凸集, 定理仍然成立。事实上, 若 $\theta \in C$, 显然, 若 $\theta \notin C$, 取定 $x_0 \in C$, 作 $D = C - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in C\}$, 于是由注1知 D 是含 θ 元的凸集。又作 $T': D \rightarrow CB(D)$, $T'(x) = T(x + x_0) - x_0$, $x \in D$ 。由 T' 也是非扩张的, 从而 T' 在 D 中存在不动点, 即存在 $y_0 \in D$ 使 $y_0 \in T'y_0 = T(y_0 + x_0) - x_0$ 。令 $z_0 = x_0 + y_0$, 则 $z_0 \in C$, 且 $z_0 \in Tz_0$ 。

此结论推广了文[7]中结论, 同时也将[6]中 P_4 定理5.1.2从单值推广到集值。

定义1 (见[5]) 设 X 是完备度量空间, 映象 $X \rightarrow CB(X)$ 称是集值半紧的。如果对于 X 中的任一有界序列 $\{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$, 则有 $\{x_n\}$ 存在强收敛子列。

定理2 设 C 是 Banach 空间 X 中非空有界闭星形集, $T: C \rightarrow CB(C)$ 是集值半紧的非扩张映象, 则 T 在 C 中存在不动点。

证 令 $T_n x = \lambda_n Tx$, $\forall x \in C$, 其中 $\lambda_n \in (0, 1)$ 且 $\lambda_n \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$)。仿定理1的证明知 T_n 有不动点 $x_n \in T_n x_n$ 。从而存在 $y_n \in Tx_n$, 使 $x_n = \lambda_n y_n$, 则

$$d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

事实上

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx_n) &= \inf \{\|x_n - y\| \mid y \in Tx_n\} \\ &= \inf \{\|\lambda_n y_n - y\| \mid y \in Tx_n\} \\ &\leq |\lambda_n - 1| \|y_n\| + \inf \{\|y_n - y\| \mid y \in Tx_n\} \\ &\leq (1 - \lambda_n) M + d(y_n, Tx_n) \\ &= M(1 - \lambda_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

其中

$$M = \sup \{\|u\| \mid u \in C\} < +\infty$$

于是由(7)式及 T 的半紧性知 $\{x_n\}$ 有强收敛子列, 再用定理1的证明方法知 T 在 C 中

存在不动点。

注3 由注2知定理2在C为有界闭凸集时也成立;推广了文[4]中主要定理。

定义2 设X是Banach空间, $K \subset X$, 映象 $T: K \rightarrow 2^X$, 若对任一弱收敛序列 $\{x_n\}$, 有 $x_n \xrightarrow{w} x \in K$ 及 $y_n \in Tx_n$, $y_n \rightarrow y$, 则 $y \in Tx$, 称T是次闭映象。

定理3 设X是Banach空间, C是X中弱紧凸子集, 且 $T: C \rightarrow CB(C)$ 是非扩张的, $I-T$ 是次闭的; 则T在C中存在不动点。

证 不妨设 $\theta \in C$, 由命题2知C是星形集, 又C是X的弱紧凸子集, 则C是闭集(见文[8] P_{34} Banach-Mazur定理), 从而C是X的完备子空间。作 $T_n x = \lambda_n T x$, $x \in C$, 其中 $\lambda_n \in (0, 1)$, $\lambda_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$ 。利用定理1的方法知 T_n 在C中有不动点 $x_n \in T_n x_n$, 即存在 $y_n \in Tx_n$, 使 $x_n = \lambda_n y_n$ 。由于C弱紧, $\{x_n\}$ 必有弱收敛子序列, 不妨记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$, $x_0 \in C$ 。又 $x_n - y_n = (\lambda_n - 1)y_n$, 令 $n \rightarrow \infty$, 则 $\lambda_n \rightarrow 1$, $x_n - y_n \rightarrow \theta$ 。又 $x_n - y_n \in (I-T)x_n$, 据 $I-T$ 的次闭性知 $\theta \in (I-T)x_0$, 即 $x_0 \in Tx_0$ 。□

注4 此结论推广了文[7]的结论。

定义3^① 设X是Banach空间, 若对X中任一满足 $x_n \xrightarrow{w} x$, $x \in x$ 的序列 $\{x_n\} \subset x$, 对一切 $y \in X$, $y \neq x$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

则称X满足Opial条件的。

推论2 设X是满足Opial条件的Banach空间, C是X中弱紧凸子集, 映象 $T: C \rightarrow C(C)$ 非扩张, 则T在C中存在不动点。

其中 $C(C) = \{B \subset C | B \text{ 是 } C \text{ 中紧子集}\}$ 。据文[9]和定理3直接可得。

定理4 设X是Banach空间, C是X中弱紧凸集, 映象 $T: C \rightarrow C$ 是拟弱连续 ($x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx$) 的非扩张, 则T在C中有不动点。

证 不妨设 $\theta \in C$, 则C是星形集, 又C是弱紧凸的, 故C是闭集。令 $T_n x = \lambda_n T x$, $x \in C$, $\lambda_n \in (0, 1)$, 且 $n \rightarrow \infty$, $\lambda_n \rightarrow 1$ 。仿定理1单值情形可得 T_n 在C中有不动点 $x_n = T_n x_n = \lambda_n T x_n$ 。由C的弱紧性, $\{x_n\}$ 有弱收敛子序列, 不妨仍记为 $\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow{w} x_0 \in C$, 于是由T的拟弱连续性知 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$ 。又 $\lambda_n \rightarrow 1$, 故 $\lambda_n Tx_n \rightarrow Tx_0$, 因而有 $x_n \xrightarrow{w} Tx_0$, 即 $x_0 = Tx_0$ 。(弱极限的唯一性)。

参 考 文 献

- [1] 张石生. 不动点理论及其应用. 重庆: 重庆出版社, 1984
- [2] W. A. Kirk. Mappings of generalized contr-active type, J. Math. Anal. Appl., 1970; 34: 567-572
- [3] F. B. Browder, W. V. Pertryshyn. J. Math. Anal. Appl., 1967; 20: 197-228
- [4] W. A. Kirk. Amer. Math. Monthly, 1965; 72: 1004-1006
- [5] 张石生, 黄南京. 四川大学学报, 1990; 27(2): 117-120
- [6] D. R. Smart. Fixed Point Theorems (中译本). 重庆: 重庆出版社, 1982

- [7] K. Yanagi. Pacific. J. Math. , 1980; 87; 233-240
- [8] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论. 上海: 华东师范大学出版社, 1986
- [9] E. Lami. Dozo. Proc. Amer. Math. Soc. , 1973; 38: 286-292

On Some Fixed Point Theorems of Non-expansive Mappings

Sheng Meibo Dong Xingnan

ABSTRACT

In this paper we obtain some fixed point theorems of nonexpansive mappings defined on star—shape set.

Key words: Banach space; Star-shape set; Nonexpansive mappings; Fixed point