图 $K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$ 的优美性

周尚超

（基础课部）

摘　要

本文讨论了图 $K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$ 的优美性。主要证明了：如果 $min\{p_0,p_1,\cdots,p_m\}\geqslant 9$，则 $K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$ 不是优美图。本文还讨论了图 $B(n,r,m)$ 的优美性。

关键词：图；完全图；优美图

1　引言和主要结果

本文用〔1〕中的记号和术语。对于完全图 K_p 及 mK_p，已知 $p\geqslant 5$ 或 $m>1$ 时不是优美图[2]。文〔3〕中提出求最小正整数 $f(K_p)$，使得 K_p 的顶点的标号 $\leqslant f(K_p)$ 时，K_p 的边的标号各不相同。例如：$f(K_5)=11$，给 K_5 的顶点标号为 0、1，4，9，11，则边的标号为 1，2，3，4，5，7，8，9，10，11。$f(K_p)$ 的求值是很困难的。现已知的有：$f(K_3)=3$，$f(k_4)=6$，$f(k_5)=11$，$f(k_6)=17$，$f(k_7)=25$，$f(k_8)=34$，$f(k_9)=44$，$f(k_{10})=55$，$f(k_{11})=72$。其它已知的有[4]。$f(k_{12})\leqslant 85$，$f(k_{13})\leqslant 111$，$f(k_{14})\leqslant 127$，$f(k_{15})\leqslant 155$。

本文主要证明了下列定理。

定理 1　设 $e(x)=\dfrac{p^2x+p}{x+1}-px+\dfrac{7}{12}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{6}$，其中 x 是正整数且 $x\leqslant p/2$，则 $f(K_p)\geqslant e(x)$。如果 p 是完全平方数，则当 $x=\sqrt{p}$ 时，$e(x)$ 取最大值。如果 $\bar{p}^2<p<(\bar{p}+1)^2$，则当 $x=\bar{p}$ 或 $\bar{p}+1$ 时，$e(x)$ 取最大值。

由定理 1，当 $P\leqslant 20$ 时，$f(K_p)$ 下界为：$f(k_{12})\geqslant 81$，$f(k_{13})\geqslant 97$，$f(k_{14})\geqslant 114$，$f(k_{15})\geqslant 133$，$f(k_{16})\geqslant 154$，$f(k_{17})\geqslant 177$，$f(k_{18})\geqslant 201$，$f(k_{19})\geqslant 227$，$f(k_{20})\geqslant 254$。

定理 1 可用下述方式来叙述。

定理 1a　设 K_p 是 G 的子图。若 G 是优美图，则 G 的边数 $q(G)\geqslant f(K_p)\geqslant e(x)$。

定理 1 提供了 K_p（$p\geqslant 5$）不是优美图的又一证明。只要 $f(k_p)>q(K_p)=p(p-$

本文于 1993 年 5 月 7 日收到

1）/2，K_p 就不是优美图。取 $x=2$，则 $e(2)=\frac{2p^2-5p+6}{3}>\frac{p(p-1)}{2}$（$p\geqslant5$）。定理1可用来判断某些具有较大完全子图的图的优美性，例如图 $k_p\cup mk_2$，只要有某个 x（$\leqslant p/2$），使 $e(x)>q(K_p)+m$，则 $K_p\cup mK_2$，不是优美图。而当 $p\geqslant5$，$x\geqslant2$ 时，$e(x)$ 总是比 $q(K_p)$ 大，$e(x)-q(K_p)$ 当 x 固定时从某个 p_0 起是 p 的增加函数。对于 $k_p\cup 2K_2$，由于包含 K_7 的优美图至少有 $f(K_7)=25$ 条边，因此 $p\leqslant6$ 时才可能是优美图。易知 $K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$，若是优美图，则 $max\{p_0, p_1, \cdots, p_m\}\geqslant4$。因此只有 $p=4$，5，6 时才可能是优美的。图1给出了这三个图的优美标号。

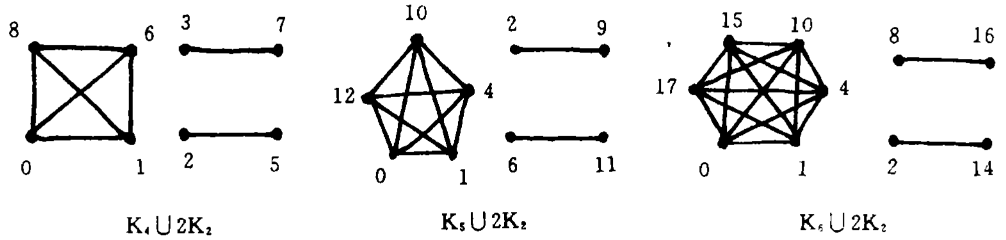

图1　三个优美图

定理2　设 $G=K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$，$p_0\geqslant p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_m\geqslant2$，$p_i\geqslant4$（$i\leqslant n$），$p_i\leqslant3$（$i>n$）。设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是固定的 $n+1$ 个正整数，$x_i\leqslant p_i/2$（$i=0, 1, \cdots, n$），$\alpha(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{x_i(x_i-1)}{2}(t_{i1}+t_{i2})+\frac{(x_i-1)(x_i-2)}{2}(t_{i3}+t_{i4})+\cdots+(t_{i,2(x_i-1)-1}+t_{i,2(x_i-1)}\right]$$

的最小值（当 t_{i1}，t_{i2}，$\cdots$，$t_{i,2(x_i-1)}$ 取（$2x_i-1$）个互不相同的正整数时）。设 $h_i=x_ip_i-\frac{x_i+1}{2}x_i+\sum_{s=1}^{p_i}\left[\frac{p_i-s}{x_i+1}\right]$，$h=\sum_{i=0}^{n}h_i$，$\varphi_i=\left(\frac{x_i^2+x_i}{2}+j_i\right)$。这里〔$x$〕表示 x 的整数部分，$0\leqslant j_i\leqslant x_i+1$。设 $\varphi_i\geqslant\varphi_{i+1}$，若 G 是优美图，M_i 是 K_{p_i} 的线的最大标号，则

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\sum_{i=0}^{n}(\varphi_iM_i-\alpha(x_0, x_1, \cdots, x_n),$$

其中 M_i 可用 $q(G)-i$ 来代替。

定理3　设 $G=K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$，若 $p_0\geqslant p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_m\geqslant9$，则 G 不是优美图。

2　定理的证明

为叙述简便，我们将点的标号与点等同看待，将线的标号与线等同看待，例如最大线（边）表示标号最大的线。

引理1　设 x 是固定的正整数，$\alpha(x)$ 是关于 t_1，t_2，$\cdots$，$t_{2(x-1)}$ 的函数。

$$\frac{x(x-1)}{2}(t_1+t_2)+\frac{(x-1)(x-2)}{2}(t_3+t_4)+\cdots+(t_{2(x-1)-1}+t_{2(x-1)})$$

的最小值，则当 t_i 取 2（$x-1$）个互不相同的正整数时有

$$\alpha(x)=\frac{1}{6}x(x+1)^2(x-1)。$$

证明 这个函数的最小值是

$$\frac{x(x-1)}{2}(1+2)+\frac{(x-1)(x-2)}{2}(3+4)+\cdots+(2x-3+2x-2),$$

易知此式的值为 $\frac{1}{6}x$（$x+1$）^{2}（$x-1$）。

引理 2 设 x 是固定的正整数，α_m（x）是关于 t_{i1}，t_{i2}，…，$t_{i,2(x-1)}$ 的函数

$$\frac{x(x-1)}{2}\sum_{i=1}^{m}(t_{i1}+t_{i2})+\frac{(x-1)(x-2)}{2}\sum_{i=1}^{m}(t_{i3}+t_{i4})+\cdots+\sum_{i=1}^{m}(t_{i,2(x-1)-1}+t_{i,2(x-1)})$$

的最小值（当 $t_{i,j}$ 取 $2m$（$x-1$）个互不相同的正整数时）。则

$$\alpha_m(x)=\frac{1}{6}m(x-1)x(x+1)(mx+1)$$

证明 设 N 为自然数集合。N_1 是最小的 $2m$ 个自然数之和且 N_1 也表示这 $2m$ 个数的集合，N_2 是 $N-N_1$ 中最小的 $2m$ 个数之和且 N_2 也表示这 $2m$ 个数的集合，N_3 是 $N-$（$N_1\cup N_2$）中的最小的 $2m$ 个数之和与集合，依此类推定义 N_j，则所求最小值为

$$\frac{x(x-1)}{2}N_1+\frac{(x-1)(x-2)}{2}N_2+\cdots+N_{x-1} \quad 。$$

易知此值为

$$\frac{1}{6}m(x-1)x(x+1)(mx+1)。$$

定理 1 的证明。记 $M=f$（K_p），设 K_p 的顶点的标号为 l_1，l_2，…，l_p，并设 $l_1<l_2<\cdots<l_p=M$。这种标号使得任意两边的标号不同。令 $d_1=l_2-l_1$，$d_2=l_3-l_2$，…，$d_{p-1}=l_p-l_{p-1}$。我们称 d_i（$i=1$，2，…．$p-1$）为 1 级线。令 $d_{i,i+1}=d_i+d_{i+1}=l_{i+2}-l_i$，并称 $d_{i,i+2}$ 为 2 级线。

令 $d_{i,i+1,i+2}=d_i+d_{i+1}+d_{i+2}=l_{i+3}-l_i$，并称为 3 级线，依此类推。显然任意一条线（的标号）是若干条下标紧相连的一级线之和。易知 K_p 有 $p-1$ 条 1 级线，$p-2$ 条 2 级线，…，$p-x$ 条 x 级线，这些条数之和就是 K_p 的线的数目 $q(K_p)$。设 $p-1=0\ (mod 6)$，则（d_{12}表示 d_1+d_2，等等）

$$d_1+d_2+\cdots+d_{p-1}\leqslant M, \tag{1}$$

$$d_{12}+d_{34}+\cdots+d_{p-2,p-1}\leqslant M, \tag{2.1}$$

$$d_{23}+d_{45}+\cdots+d_{p-3,p-2}\leqslant M-d_1-d_{p-1}, \tag{2.2}$$

$$d_{123}+d_{456}+\cdots+d_{p-3,p-2,p-1}\leqslant M, \tag{3.1}$$

$$d_{234}+d_{567}+\cdots+d_{p-5,p-4,p-3}\leqslant M-d_1-d_{p-1}-d_{p-2}, \tag{3.2}$$

$$d_{345}+d_{678}+\cdots+d_{p-4,p-3,p-2}\leqslant M-d_1-d_2-d_{p-1}, \tag{3.3}$$

一般地，$x\ (\leqslant p/2)$ 级线共有 x 组。x 级线的第 j 组用 (x,j) 表示，第 j 组共有 $\left[\frac{p-j}{x}\right]$条线，这些线之和 $r(x,j)\leqslant M$，所有 x 级线之和 $\beta_x=\sum_{j=1}^{x}r(x,j)$。由以上所列 6 个式子知 $\beta_1\leqslant M$，$\beta_2\leqslant 2M-d_1-d_{p-1}$，$\beta_3\leqslant 3M-2(d_1+d_{p-1})-(d_2+d_{p-2})$。一般地，无论 $p-1$ 为何值，只要 $t\leqslant p/2$，就有

$$\beta_t\leqslant tM-(t-1)(d_1+d_{p-1})-(t-2)(d_2+d_{p-2})-\cdots-(d_{t-1}+d_{p-t+1}),$$

$$\sum_{t=1}^{x}\beta_t+\sum_{s=1}^{j}r(x+1,s)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}x+j\right)M-\frac{x(x-1)}{2}(d_1+d_{p-1})$$

$$-\frac{(x-1)(x-2)}{2}(d_2+d_{p-2})-\cdots-(d_{x-1}+d_{p-x+1}),\quad (*)$$

$\sum_{t=1}^{x}\beta_t+\sum_{s=1}^{j}r(x+1,s)$ 是 $h=h(x,j)=xp-\frac{x+1}{2}x+\sum_{s=1}^{j}\left[\frac{p-s}{x+1}\right]$个不同的正整数之和，它 $\geqslant 1+2+\cdots+h=\frac{h^2+h}{2}$。由引理 1，从（*）式得

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\left(\frac{x+1}{2}x+j\right)M-\frac{1}{6}x(x+1)^2(x-1).$$

取 $j=0$（即不取 $x+1$ 级线），化简后得

$$e(x)=\frac{p^2x+p}{x+1}-px+\frac{7}{12}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{6}\leqslant M=f(K_p)。$$

易证关于 $e(x)$ 的最大值的结论。　　证毕。

定理 2 的证明　定理 1 证明中关于 K_p 的那些结论对于 K_{p_i}是成立的，只要再添一个下标 i 就行了。特别（*）在这里为（M_i 为 K_{p_i}的最大线）

$$\sum_{t=1}^{x_i}\beta_{i,t}+\sum_{s=1}^{j_i}r(x_{i+1},s)\leqslant(\frac{x_i+1}{2}x_i+j_i)M_i-\frac{x_i(x_i-1)}{2}(d_{i,1}+d_{i,p_i-1})$$

$$-\frac{(x_i-1)(x_i-2)}{2}(d_{i,2}+d_{i,p_i-2})-\cdots-(d_{i,x_i-1}+d_{i,p_i-x_i+1})。$$

记 $\varphi_i=\frac{x_i+1}{2}x_i+j_i$，则

$$\sum_{i=0}^{n}\Big[\sum_{t=1}^{x_i}\beta_{i,t}+\sum_{s=1}^{j_i}r(x_{i+1},s)\Big]\leqslant\sum_{i=0}^{n}\varphi_iM_i-\alpha(x_0,x_1,\cdots,x_n)。$$

记 $h_i=x_ip_i-\frac{x_i+1}{2}x_i+\sum_{s=1}^{j_i}\Big[\frac{p_i-s}{x_i+1}\Big]$，$h=\sum_{i=0}^{n}h_i$。上式左边是 h 个不同的正整数之和，因此有

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\varphi_iM_i-\alpha(x_0,x_1,\cdots,x_n)。$$

由于 $M_i\leqslant q(G)$ 且 M_i（$i=0,1,\cdots,n$）是 $n+1$ 个互不相同的正整数，又 $\varphi_i\geqslant\varphi_{i+1}$，因此 $\sum_{i=0}^{n}\varphi_iM_i\leqslant\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(q(G)-i)$，

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(q(G)-i)-\alpha(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$ 证毕

定理3的证明　设 $Q=q(G)$，设 G 是优美图，由定理2，有

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\sum_{i=0}^{m}\varphi_iQ,$$

或

$$h(h+1)\leqslant\sum_{i=0}^{m}5\varphi_i\cdot\sum_{i=0}^{m}(p_i^2-p_i)/5\quad。\qquad(**)$$

下面我们证明 $p_m\geqslant9$ 时，（**）式不成立。

情形1)　设 $p_i=3x_i+4$。取 $j_i=1$，$h_i=x_i(3x_i+4)-\frac{x_i+1}{2}x_i+3=\frac{1}{2}(5x_i^2+7x_i+6)$，$5\varphi_i=5(\frac{x_i+1}{2}x_i+1)=\frac{1}{2}(5x_i^2+5x_i+10)$，$\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)=\frac{1}{5}(9x_i^2+21x_i+12)$。

$$h_i-5\varphi_i=\frac{1}{2}(2x_i-4)\geqslant0,\quad(p_i\geqslant10)$$

$$h_i-\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)=\frac{1}{10}(7x_i^2-7x_i+6)\geqslant 0$$

情形 2)　设 $p_i=3x_i+5$。取 $j_i=2, h=x_i(3x_i+5)-\frac{x_i+1}{2}x_i+6=\frac{1}{2}(5x_i^2+9x_i+12), 5\varphi_i=\frac{1}{2}(5x_i^2+5x_i+20), \frac{1}{5}(p_i^2-p_i)=\frac{1}{5}(9x_i^2+27x_i+20)$。

$$h_i-5\varphi_i=\frac{1}{2}(4x_i-8)\geqslant 0, (p_i\geqslant 11)$$

$$h_i-\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)=\frac{1}{10}(7x_i^2-9x_i+20)\geqslant 0。$$

情形 3)　设 $p_i=3x_i+6$。取 $j_i=3$，$h_i=x_i$ $(3x_i+6)$ $-\frac{x_i+1}{2}x_i+9=\frac{1}{2}$ $(5x_i^2+11x_i+18)$，$5\varphi_i=\frac{1}{2}$ $(5x_i^2+5x_i+30)$，$\frac{1}{5}$ $(p_i^2-p_i)$ $=\frac{1}{5}$ $(9x_i^2+33x_i+30)$。

$$h_i-5\varphi_i=\frac{1}{2}(6x_i-12)\geqslant 0,\qquad (p_i\geqslant 12)$$

$$h_i-\frac{1}{5}(\varphi^2-p)=\frac{1}{10}(7x_i^2-11x_i+30)\geqslant 0。$$

情形 4)　设 $p_i=9$。取 $x_i=2$，$j_i=0$，

$$h_i-5\varphi_i=0, h_i-\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)=0.6。$$

因此，当 $p_m\geqslant 9$ 时

$$h=\sum_{i=0}^{m}h_i\geqslant\sum_{i=0}^{m}5\varphi_i,\quad h\geqslant\sum_{i=0}^{m}(p_i^2-p_i)/5,$$

$$h(h+1)>\sum_{i=0}^{m}5\varphi_i\cdot\sum_{i=0}^{m}(p_i^2-p_i)/5。$$　证毕

3　若干推论

定理 4　设 $e_m(x)=m\left(\frac{p^2x}{1+x}-px+\frac{7x^2-x+12}{12}\right)+\frac{p}{1+x}+\frac{2x-11}{6}$，$x$ $(\leqslant p/2)$ 为正整数。若 mK_p 是 G 的子图且 G 是优美图，则 G 的边数 $q(G)\geqslant e_m(x)$。当 p 是完全平方数

时，$x=\sqrt{p}$ 时 $e_m(x)$ 取最大值。当 $\bar{p}^2<p<(\bar{p}+1)^2$ 时，$x=\bar{p}$ 或 $\bar{p}+1$ 时 $e_m(x)$ 取最大值。

证明 在定理 2 中，取 $x_0=x_1=\cdots=x_n=x_{m-1}=x$，$j_0=j_1=\cdots=j_n=j_{m-1}=0$。则 $h=m(xp-\frac{x+1}{2}x)$。由引理 2 $\alpha(x_0,x_1,\cdots,x_{m-1})=\alpha_m(x)$，

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\frac{x^2+x}{2}\sum_{i=0}^{m-1}M_i-\frac{1}{6}m(x-1)x(x+1)(mx+1)。$$

设 $M_i=l_{ip}-l_{i1}$。$\sum_{i=0}^{m-1}M_i=\sum_{i=0}^{m-1}l_{ip}-\sum_{i=0}^{m-1}l_{i1}$，$\sum_{i=0}^{m-1}l_{ip}\leqslant q+(q-1)+\cdots+(q-m+1)$，$\sum_{i=0}^{m-1}l_{i1}\geqslant 0+1+\cdots+m-1$。因此，$\sum_{i=0}^{m-1}M_i\leqslant mq-m(m-1)$，这里 $q=q(G)$。将 $\sum_{i=0}^{m-1}M_i$ 代入上式化简后得

$$e_m(x)=m(\frac{p^2x}{1+x}-px+\frac{7x^2-x+12}{12})+\frac{p}{1+x}+\frac{2x-11}{6}\leqslant q。$$

易证关于 $e_m(x)$ 最大值的结论。 证毕

系 1 若 $p\geqslant 5$，则 mK_p 不是优美图。

证明 取 $x=2$，则

$$e_m(2)=\frac{1}{6}[(4p^2-12p+19)m+2p-7]。$$

当 $p\geqslant 6$ 时，$e_m(2)>q(mK_p)$，mK_p 不是优美图。对 mK_5，取诸 x 为 1，j 为 1，则 $h=6m$。若 mK_5 优美，则

$$\frac{(6m)^2+6m}{2}\leqslant 2\sum_{i=0}^{m-1}M_i\leqslant 2(mq-m(m-1)),$$

化简后得 $q(G)\geqslant 10m+\frac{1}{2}$。但 mK_5 只有 $10m$ 条边，因此，mK_5 非优美。

定理 5 设 $G=K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$，$m\geqslant 10$。若 $p_0\geqslant 2m+6$，则 G 非优美。

证明 由定理 2，若 G 优美，则

$$\frac{h^2+h}{2}\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\varphi_i q(G),$$

$$h^2+h\leqslant\sum_{i=0}^{n}5\varphi_i\cdot\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)。$$

当 $i>n$ 时，$p_i=3$ 或 2，$\frac{p_i^2-p_i}{5}=1.2$ 或 0.4，$i>n$ 时无相应的 h_i 和 φ_i，可看作 $h_i=0$，$\varphi_i=0$。当 $p_i=4$、5、6 时，取 $x_i=1$，$j_i=0$；$p_i=7$ 时，取 $x_i=1$，$j_i=1$；$p_i=8$ 时，$x_i=2$，$j_i=0$。此时有 $h_i-5\varphi_i\geqslant-2$，$h_i-(p_i^2-p_i)/5\geqslant-1.2$。对那些 $\leqslant 8$ 的 p_i，有 $\sum(h_i-5\varphi_i)\geqslant-2m$，$\sum(h_i-(p_i^2-p_i)/s)\geqslant-1.2m$。

情形 1）　设 $p_0=3x_0+6\geqslant 2m+6$。取 $j_0=0$，$h_0=x_0(3x_0+6)-\frac{x_0^2+x_0}{2}=\frac{5x_0^2+11x_0}{2}$，$5\varphi_0=\frac{5x_0^2+5x_0}{2}$。$\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=\frac{1}{10}(18x_0^2+66x_0+60)$。$h_0-5\varphi_0=3x_0\geqslant 2m$。$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=\frac{1}{10}(7x_0^2-11x_0-60)$。$3x_0\geqslant 2m\Rightarrow\frac{9x_0}{5}\geqslant 1.2m$，当 $x_0\geqslant 6$ 时，$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)\geqslant\frac{9}{5}x_0\geqslant 1.2m$。

情形 2）　设 $p_0=3x_0+7\geqslant 2m+6$。取 $j_0=0$，则 $h_0-5\varphi_0=4x_0\geqslant 2m$，$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=\frac{1}{10}(7x_0^2-13x_0-84)\geqslant\frac{9x_0+3}{5}\geqslant 1.2m$。$(x_0\geqslant 7)$

情形 3）　设 $p_0=3x_0+8\geqslant 2m+6$。取 $j_0=0$，则 $h_0-5\varphi_0=5x_0\geqslant 2m$，$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=\frac{1}{10}(7x_0^2-15x_0-112)\geqslant\frac{9x_0+6}{5}\geqslant 1.2m$。$(x_0\geqslant 8)$

情形 4）　设 $p_0=3x_0+8\geqslant 2m+6$。$x_0=6$ 时，取 $j_0=3$，则 $h_0-5\varphi_0=24\geqslant 2m$，$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=14\geqslant 1.2m=12$。$x_0=7$ 时，取 $j_0=1$，则 $h_0-5\varphi_0=33\geqslant 2m$，$h_0-\frac{1}{5}(p_0^2-p_0)=15.6\geqslant 1.2m$。

因此，$h=\sum_{i=0}^{n}h_i\geqslant\sum_{i=0}^{n}5\varphi_i$，$h\geqslant\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{5}(p_i^2-p_i)$，$h^2+h>\sum_{i=0}^{n}5\varphi_i q(G)$。
G 不是优美图。

类似地可证定理 6。

定理 6　设 $G=K_{p_0}\cup K_{p_1}\cup\cdots\cup K_{p_m}$，$m\leqslant 9$。若 $p_0\geqslant 23$，则 G 非优美。

对于 $K_p\cup K_n$，文〔5〕证明了只有当 $(p,n)=(4,2)$ 和 $(5,2)$ 时才是优美图。$K_4\cup K_2$ 的优美标号是 $\{0,1,5,7\}\cup\{3,6\}$；$K_5\cup K_2$ 的优美标号是 $\{0,1,4,9,11\}\cup\{2,8\}$。对于 $K_p\cup K_n\cup K_t$，图 2 给出 3 个优美图。

4　图 $B(n,r,m)$ 的优美性

图 $B(n,r,m)$ 是有一个公共 K_r 的 m 个 K_n 组成的图。由文〔2〕知 $(n,r)=(3,2)$，$(4,2)$ 或 $(4,3)$ 时，$B(n,r,m)$ 是优美图。文〔2〕中指出，当 n 比 r 充分大时 $B(n,r,m)$ 不是优美图，当 n 与 r 之差较小时，利用定理 1，可得 $B(n,r,m)$ 的优美性的一些结果。

定理 7　设 $G=B(n,n-r,m)$。若 $n\geqslant\frac{14rm-14r+75}{5}$，则 G 非优美。

证明　设 G 是优美图。由于 K_n 是 G 的子图，由定理 1a，$q(G)\geqslant e(x)$。取 $x=6$，得

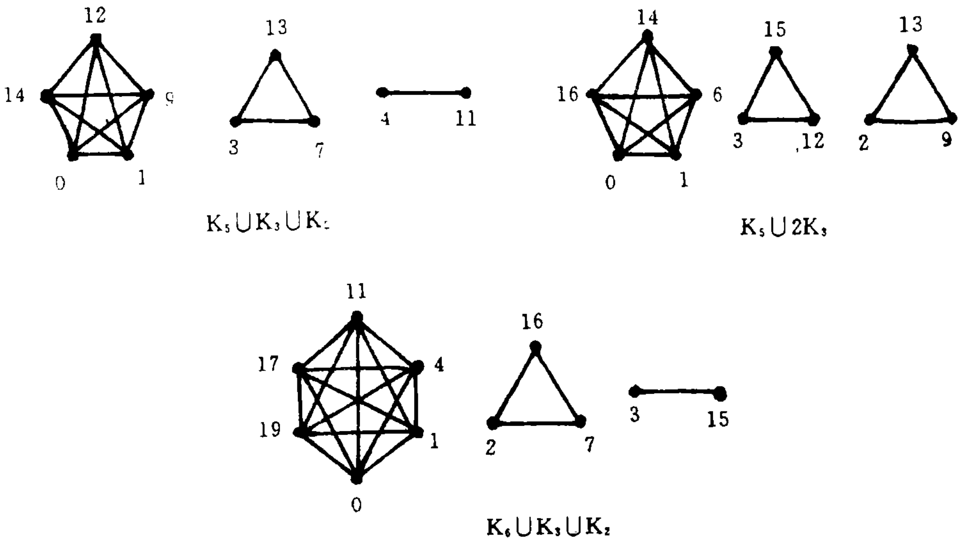

图 2 三个优美图

$e(6)=\frac{1}{7}(6n^2-41n)+\frac{65}{3}$，$q(G)=\frac{n^2-n}{2}+(m-1)\left[r(n-r)+\frac{r^2-r}{2}\right]=\frac{n^2-n}{2}+mrn-rn-(m-1)\frac{r^2+r}{2}$，$e(6)-q(G)>\frac{1}{7}(6n^2-41n)-\frac{n^2-n}{2}-mrn+rn=\frac{1}{14}(5n-14rm+14r-75)n$。当 $n\geqslant\frac{1}{5}(14rm-14r+75)$ 时，$e(6)>q(G)$，G 非优美。

定理 7 是取 $x=6$ 来计算的。一般地，当取 $x=[\sqrt{n}]$ 可得较好结果，但算式太复杂。可用定理 5 先得一个初步的 n 值，再调整 x 值来获得较好的结果。例如对 $B(n,n-1,2)$，由定理 7 得 $n\geqslant 18$ 时非优美。我们希望 n 值再小一些时也是非优美的，取 $x=3$，$e(3)=\frac{1}{12}(9n^2-33n+62)$。当 $n\geqslant 11$ 时 $e(3)>q(G)$。因此 $n\geqslant 11$ 时 $B(n,n-1,2)$ 非优美。但由 $f(K_{10})=55$，即包含 K_{10} 的图若是优美的，它至少有 55 条边，而 $B(10,9,2)$ 只有 54 条边，因此 $B(10,9,2)$ 非优美，$n\geqslant 10$ 时 $B(n,n-1,2)$ 非优美。

作者感谢徐保根和刘二根在本文完成过程中给予的帮助。

参 考 文 献

[1] Harary,F., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

[2] Gallian,J. A., A Survey: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labeling Graphs, Journal of Graph Theory. Vol. 13. No. 4,491-504(1989).

[3] Bermond,J. C., Graceful graphs, radio antennae and French windmills, Graph Theory and Combinatorics. Pitman, London(1979)13-37.

[4] Simmons,G. J., Synch sets: A rariant of difference set, Proceedings of the Fifth Southeastern Conf. On Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton 1974, Utilitas Math., Congressus Numerantium X(1974).

[5] 周尚超,关于图 $K_m \cup K_n$ 的优美性。兰州铁道学院学报,1993,(2).

Gracefulness of the Union of Complete Graphs

Zhou Shangchao

ABSTRACT

In this paper. The following theorem is obtained: Let $G = K_{p_0} \cup K_{p_1} \cup \cdots \cup K_{p_m}$, where $p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \cdots \geqslant p_m$, if $p_m \geqslant 9$, then G is not graceful.

Key words: Graph; Complete graph; Graceful graph