

图与补图的线荫度

徐保根

(基础课部)

摘 要

设 $\underline{r}(G)$ 表示图 G 的线荫度, 本文证明了: 对任意 p 阶单图 G ($p \geq 3$), 均有

$$\left\{ \frac{p}{2} \right\} \leq \underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\{ (5p+9)/8 \right\}$$

其中 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数。

关键词: 图; 补图; 线荫度

0 引 言

本文所指的图均为无向单图。 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集; 若 G_1 和 G_2 为两个无公共点的图, 用 G_1+G_2 表示图 $\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$ 的补图。若 S 是 $V(G)$ 的一个子集, 则 $G[S]$ 表示点集 S 在 G 中的导出子图。

在本文中, $\underline{r}(G)$ 表示图 G 的线荫度, 其定义为: 将 G 分解为线不相交的生成林时生成林的最少数目 (参见 [1])。对于图与补图的点荫度已有文章研究过, 如文献 [2] 和 [3]。本文仅考虑图与补图的线荫度关系, 得到了其和的较理想的界限。本文中未说明的符号, 术语均同于 [1]。

1 定理和引理的叙述

定理 对于任意一个 p 阶图 G , ($p \geq 3$) 均有

$$\left\{ \frac{p}{2} \right\} \leq \underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\{ \frac{5p+9}{8} \right\}.$$

为了证明定理方便, 下面列出 [1] 中的有关结论。

本文于 1993 年 3 月 22 日收到

引理1 令 G 为一个非平凡的 (p, q) 图, 又令 q_n 是 G 的任何一个有 n 个点的子图中线的最多数目。则

$$\underline{r}(G) = \max_n \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\}.$$

引理2 (1) 若 G 为 (p, q) 图, 则 $\underline{r}(G) \geq \left\{ \frac{q}{p-1} \right\}$,

$$(2) \underline{r}(K_p) = \left\{ \frac{p}{2} \right\}.$$

下面引理3是显然的。

引理3 对于任意实数 a 和 b , 均有

$$\{a+b\} \leq \{a\} + \{b\} \leq \{a+b\} + 1 = \{a+b+1\}.$$

2 定理的证明

设 G 为任意一个 (p, q) 图, 则 $\bar{q} = |E(\bar{G})| = \binom{p}{2} - q$, 由引理2(1)及引理3得

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\bar{G}) \geq \left\{ \frac{q}{p-1} \right\} + \left\{ \frac{\bar{q}}{p-1} \right\} \geq \left\{ \frac{q+\bar{q}}{p-1} \right\} = \left\{ \frac{\binom{p}{2}}{p-1} \right\} = \left\{ \frac{p}{2} \right\}.$$

下面证明 $\underline{r}(G) + \underline{r}(\bar{G})$ 的上界。

设图 G 为在所有的 p 阶图中, 使得 $\underline{r}(G) + \underline{r}(\bar{G})$ 取得最大值的一个图。

由引理1, 存在 $V(G)$ 的子集 S_1 和 $V(\bar{G})$ 的子集 S_2 。令: $|S_1|=m$, $|S_2|=n$ 。不妨设 $m \geq n$ (否则考虑图 $\bar{G}$)。记 $G_1 = G[S_1]$, $G_2 = \bar{G}[S_2]$,

使得
$$\underline{r}(G) = \left\{ \frac{q_m}{m-1} \right\}, \quad \underline{r}(\bar{G}) = \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\}.$$

其中 $q_m = |E(G_1)|$, $q_n = |E(G_2)|$ 。

再令

$$S_0 = S_1 \cap S_2, |S_0| = t,$$

$$G_0 = G[S_0], |E(G_0)| = x,$$

故有

$$p \geq m \geq n \geq t \geq 0;$$

$$0 \leq x \leq \binom{t}{2},$$

$$q_m \leq \binom{m}{2} - \left[\binom{t}{2} - x \right],$$

$$q_n \leq \binom{n}{2} - x.$$

从而有

$$\begin{aligned} r_-(G) + r_-(\overline{G}) &= \left\{ \frac{q_m}{m-1} \right\} + \left\{ \frac{q_n}{n-1} \right\} \\ &\leq \left\{ \frac{\binom{m}{2} - \binom{t}{2} + x}{m-1} \right\} + \left\{ \frac{\binom{n}{2} - x}{n-1} \right\} \\ &\leq \left\{ \frac{\binom{m}{2} - \binom{t}{2} + x}{m-1} + \frac{\binom{n}{2} - x}{n-1} \right\} + 1, \end{aligned}$$

即

$$r_-(G) + r_-(\overline{G}) \leq \left\{ \frac{m+n}{2} - \frac{\binom{t}{2}}{m-1} - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1} \right) \cdot x \right\} + 1. \quad (1)$$

此外, 由于

$$p = |V(G)| \geq |S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|,$$

即有

$$p \geq m + n - t, \quad m + n \leq p + t,$$

又由于 $p \geq m \geq n$, $0 \leq x \leq \binom{t}{2}$, 故由 (1) 式可得

$$r_-(G) + r_-(\overline{G}) \leq \left\{ \frac{p+t}{2} - \frac{\binom{t}{2}}{p-1} \right\} + 1. \quad (2)$$

令 函数 $\varphi(t) = \frac{p+t}{2} - \frac{\binom{t}{2}}{p-1} = -\frac{1}{2(p-1)}t^2 + \frac{p}{2(p-1)}t + \frac{p}{2}$, 不难验证 $\varphi(t)$ 在 $[0, \frac{p}{2}]$ 上递增; 在 $[\frac{p}{2}, p]$ 上递减。即当 $t = \frac{p}{2}$ 时, $\varphi(t)$ 在 $[0, p]$ 上取得最大值 $M = \varphi(\frac{p}{2})$, 亦即

$$\varphi(t) \leq M = -\frac{1}{2(p-1)}\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p}{2(p-1)} \cdot \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = \frac{5p^2 - 4p}{8(p-1)}.$$

由 (2) 知

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \langle \varphi(t) \rangle + 1,$$

即

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\langle \frac{5p^2 - 4p}{8(p-1)} \right\rangle + 1 = \left\langle \frac{5p^2 + 4p - 8}{8(p-1)} \right\rangle.$$

简化上式右端得

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\langle \frac{5p+9}{8} + \frac{1}{8(p-1)} \right\rangle \quad (3)$$

(a) 当 p 为偶数时, $\frac{5p+9}{8}$ 不是为整数。故有

$$\left\langle \frac{5p+9}{8} \right\rangle - \frac{5p+9}{8} \geq \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8(p-1)}, \quad (p \geq 2)$$

从而

$$\frac{5p+9}{8} + \frac{1}{8(p-1)} \leq \left\langle \frac{5p+9}{8} \right\rangle.$$

因此当 p 为偶数时, (3) 式可改写为:

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\langle \frac{5p+9}{8} \right\rangle.$$

(b) 当 p 为奇数时, 考虑到函数 $\varphi(t)$ 中 t 所表示的具体意义 (t 为非负整数), 此时, 仅

当 $t = \frac{p-1}{2}$ 或 $t = \frac{p+1}{2}$ 时, 才可能取得 $\varphi(t)$ 的最大值。不难计算

$$\varphi\left(\frac{p-1}{2}\right) = \varphi\left(\frac{p+1}{2}\right) = \frac{5p+1}{8},$$

即当 p 为奇数时, (2) 式变为:

$$\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{5p+1}{8} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{5p+9}{8} \right\rfloor.$$

至此, 定理证毕。

3 结束语

本文定理主要是给出图 G 与其补图 $\overline{G}$ 的线荫度之和的上界(其下界较为明显)。反映了 G 和 $\overline{G}$ 的线荫度之间的一种密切关系, 所给出的界限是较为理想的。当然, 是否为可达界, 这还与 G 的阶数有关。我们将作进一步研究。

回顾定理证明中对 $\underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G})$ 的上界分析, 不难发现, 若令 $H \cong K_r + \overline{K}_s$, 其中 $r+s=p$, $|r-s| \leq 1$, 则 $\underline{r}(H) + \underline{r}(\overline{H})$ 将会接近(或等于)定理中所给出的上界。

参 考 文 献

- [1] F. 哈拉里著. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980. 105~106.
- [2] 张忠辅, 王建方. 图和补图的荫度. 曲阜师范大学学报, 1990, (2): 11~13
- [3] 周尚超. 自补图的荫度. 华东交通大学学报, 1992, (4): 236~239

The Arboricity of A Graph and its Complement

Xu Baogen

ABSTRACT

Let $\underline{r}(G)$ be the arboricity of G . This paper gives a result as follows: if G is a Graph of order P , then $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq \underline{r}(G) + \underline{r}(\overline{G}) \leq \left\lfloor \frac{5p+9}{8} \right\rfloor$ where $\{x\}$ denotes a minimum integer not less than x .

Key words: Graph; Complement; Arboricity