

中子注量场的分布

黄世益

(基础课部)

摘 要

本文提出了一种用于分析三维中子注量场在实际使用中的方法. 该方法以高斯求积公式为基础, 分析了高斯求积公式余项和结点数目之间的关系, 并考虑到轴向和横向分布的不均匀性. 作为应用实例, 文章对中国农业科学院原子能利用研究所的中子发生器的注量场的分布进行了精确的计算与分析.

关键词: 注量场; 轴向分布; 横向分布

0 引 言

近年来, 在我国放射性同位素得到广泛应用, 对于 γ 射线的辐射剂量和辐射场的计算介绍较多^{〔1〕〔2〕}. 目前在工业、放射医学、辐射生物学的研究和生产、应用实践中, 中子发生器得到广泛的使用. 对于单能中子, 只要知道中子注量和中子能量 E 的值以及相应的比释动能因子 K_f , 就可以求出比释动能. 关于中子的比释动能与注量的关系在作者的文献〔2〕中已经给出结果, 而中子发生器的中子注量场的计算与分析在国内外文献中, 很少见到精确的计算. 本文对靶源附近空间中子注量的分布进行了精确计算, 同时为应用高斯求积公式选用结点数提供了参考.

1 注量场的计算

为了描述一个均匀发射的园靶在周围空间中, 中子注量场的分布情况, 我们仅需给出和园靶轴线垂直的横截面上任一点的注量就可知道整个

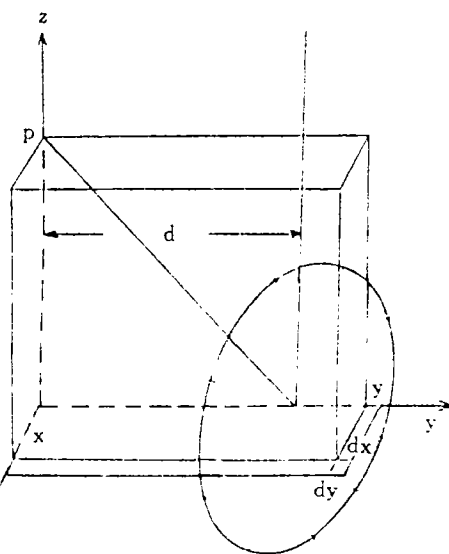


图 1

本文于 1993 年 12 月 25 日收到

注量场的分布, 称横向注量分布 [The Lateral flux distribution (LFD)] .

设中子发生器的靶半径为 r_0 的园靶形的面源, 单位面积单位时间发射的中子数为 N . 采用笛卡尔坐标, 面源在 xy 平面内, 面源中心的坐标为 $(0, d, 0)$, 场点 p 在 z 轴上距面源中心轴线的距离为 d , 见图 1.

首先研究在 x, y 处的面元 $dxdy$ 在 p 点的元注量 $d\Phi$,

$$d\Phi = \frac{N}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)} dxdy,$$

总通量为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int d\Phi = \frac{2N}{4\pi} \int_0^{r_0 \sin \theta} \int_{d-r_0}^{d+r_0} \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{N}{2\pi} \int_{d-r_0}^{d+r_0} [\arctg(\frac{r_0 \sin \theta}{\sqrt{y^2 + z^2}})] \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

令 $\eta = \cos \theta$ 则

$$y = d + r_0 \cos \theta = d + r_0 \eta,$$

$$dy = r_0 d\eta, \quad r_0 \sin \theta = r_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = r_0 \sqrt{1 - \eta^2}.$$

经上述变量变换后, 上式转化为:

$$\Phi(z, d) = \frac{Nr_0}{2\pi} \int_{-1}^1 [\arctg(\frac{r_0 \sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{z^2 + (d + r_0 \eta)^2}})] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + r_0^2 \eta^2}}. \quad (1)$$

当 $d=0$ 时, 得

$$\Phi(z) = \frac{Nr_0}{2\pi} \int_{-1}^1 [\arctg(\frac{r_0 \sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{z^2 + r_0^2 \eta^2}})] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + r_0^2 \eta^2}}. \quad (2)$$

(2) 式表示沿面源中心轴线方向注量的分布, 称为轴向注量分布 [The axial flux distribution (AFD)].

若采用极坐标来计算 (AFD), 则面元 $rdrd\theta$ 在 z 处的元注量 $d\Phi$ (见图 2) 有

$$\begin{aligned}d\Phi &= \frac{N}{4\pi(z^2 + r^2)} r dr d\theta \\ &= \frac{N}{4\pi(z^2 + r^2)} dr dl,\end{aligned}$$

对整个靶面积分得

$$\begin{aligned}\Phi(Z) &= \frac{N}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{1}{z^2 + r^2} dr dl \\ &= \frac{N}{4\pi} \int_0^{r_0} \frac{2\pi r}{z^2 + r^2} dr\end{aligned}$$

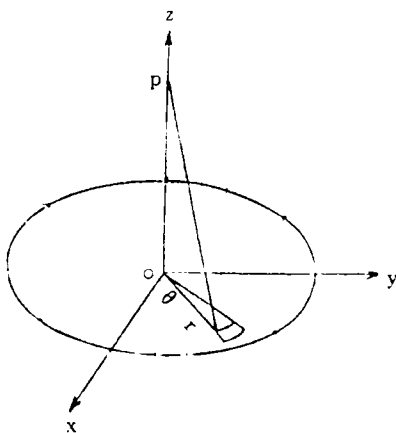


图 2

$$= \frac{N}{4} \ln \left(\frac{z^2 + r_0^2}{z^2} \right) \quad (3)$$

比较 (2) 和 (3) 我们得到一个有意义的积分公式：

$$\int_{-1}^1 \left[\arctg \left(\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{z^2 + r_0^2 \eta^2}} \right) \right] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + r_0^2 \eta^2}} = \frac{\pi}{2r_0} \ln \left(\frac{z^2 + r_0^2}{z^2} \right)$$

此关系式为估计高斯求积公式的余项的大小提供了依据。

2 高斯求积公式的余项分析

由于微机的使用日益广泛，在解决生产和科学实验提出的种种计算问题中，必须在确定所采用的计算方法时，首先要对其余项进行充分的分析。目前在进行该类积分计算时常采用高斯型求积公式来进行近似值的计算。

高斯求积公式如下^[3]：

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}).$$

式中 $\xi_k^{(n)}$ 为勒让德多项式 $p_n(x)$ 的根，其余项为：

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\eta) \quad -1 < \eta < 1$$

从数学的角度来看，若结点数目固定后，其余项有确定的结果，但从实际应用的角度来分析，余项的实际估计一般来说是相当麻烦的，且不一定能给出余项的近似结果。在本文讨论的问题中，余项是 z 、 d 、 η 的函数。要计算 $f(\eta)$ 的 $2n$ 阶导数以及 η 在 $(-1, 1)$ 之间取值的不确定性，原则上讲余项的估计在实际上是做不到的。但在近似计算的应用中又必须给出余项的分析，否则近似计算的结果意义不大。

本文借助于公式 (2) 和 (3) 的等价性，可以估计出该高斯积分的余项和结点数目之间的关系，对计算其它类型的高斯积分确定选取结点数目可作为参考。

表1 $\Phi(0.5)$ 的余项 $R_n(f)$ 与 n 的关系

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
真实值	0.575646273								
近似值	0.42307	0.66505	0.54086	0.59436	0.56766	0.58016	0.57382	0.57678	0.57526
$\frac{R_n(f)}{\text{真实值}} \%$	-26.5	+15.5	-6.04	+3.25	-1.39	+0.785	-0.317	+0.197	-0.07

我们依据文献〔4〕中的高斯求积公式结点、系数表的数据计算了 $\Phi(0.5)$ 和结点数 n 之间的近似值和真实值之间的百分误差的关系 (余项占真实值的百分比), 计算结果见表 1.

从上表看出: 结点数 n 取偶数时, 其近似值较真实值为小; n 取奇数时, 其近似值较真实值为大. 考虑到上述规律, 建议: 在进行精确计算时, 结点数 n 可选取 7 和 8, 然后分别计算出结果, 再取平均值作为近似计算的结果, 这样可提高精确度.

现讨论 $\Phi(z)$ 的余项 $R_5(f)$, $R_{10}(f)$ 随 z 的关系. 计算结果见表 2.

表 2 $\Phi(z)$ 的余项 $R_5(f)$, $R_{10}(f)$ 与 z 的关系

z (cm)		0.2	0.4	0.6	1.0	1.5	2.0
$\Phi(z)$							
真实值		1.01186	0.67805	0.49525	0.29466	0.17329	0.11157
近似值	$n=5$	1.21487	0.65546	0.44654	0.25212	0.14412	0.09143
	$n=10$	0.96950	0.67609	0.49522	0.29474	0.17334	0.11161
$\frac{R_n(f)}{\text{真实值}} \%$	$n=5$	+20.1	+3.33	-9.84	-14.44	-16.83	-18.05
	$n=10$	-4.18	-0.29	-0.005	+0.026	+0.006	+0.036

结果分析如下:

- (1) 当 $z > 0.4\text{cm}$ 时, $R_{10}(f)$ 的最大偏差为 3%.
- (2) 当 z 在 0.2cm 到 2.0cm 之间变化时 $R_5(f)$ 的偏差均在 10% 以上.
- (3) 由于 $\Phi(z)$ 的余项 $R_5(f)$ 占真实值的百分比远超过近似计算误差的范围, 在一般的近似计算中 n 必须超过 5.

3 计算实例

根据上述理论分析, 我们对中国农业科学院, 原子能利用研究所的中子发生器的中子注量场进行了精确的计算. 园靶的半径 $r_0 = 1.5\text{cm}$, 封闭在 $R = 5.0\text{cm}$ 的容器中, 我们采用结点数 $n = 10$ 进行了计算, 结果如表 3.

表 3 中子发生器注量场的分布

d (cm)		0.4	0.8	1.5	2.0	3.0	5.0	8.0
$\Phi(z, d)$								
$\Phi(0.5, d)$		0.5608	0.5128	0.3219	0.1736	0.0690	0.0233	0.0089
$\Phi(1, d)$		0.2862	0.2556	0.1834	0.1280	0.0609	0.0216	0.0088
$\Phi(1.5, d)$		0.1675	0.1671	0.1204	0.0928	0.0530	0.0214	0.0086

从表3结果看出，在园靶附近的注量场很不均匀，不易使用，但当 d 超过8cm后其注量场相当均匀可供科研和生产使用。

参 考 文 献

- [1] 黄世益. 农作物吸收能量的计算与比较. 原子能科学技术, 1964, (9): 1095—1100
- [2] 唐掌雄, 黄世益. 农作物吸收剂量的计算. 原子能农业应用, 1984, (2): 51—60
- [3] 清华大学, 北京大学合编. 计算方法. 北京: 科学出版社, 1974. 116—122
- [4] 数学手册. 北京: 人民教育出版社, 1979, 295—296

Neutron-Flux Field Distribution

Huang Shiyi

ABSTRACT

In the paper, author presented a practical method of analysing three-dimensional neutron-flux field distribution. On the Gauss-integration formular and considering inhomogeneity about the axial flux distribution and the lateral flux distribution, author analyzed fully the relation between remainder of the Gauss integration formular and nodel point number.

As an application example, the neutron-flux field distribution in the neutron generator in an Institute for application of Atomic Energy is accurately analyzed and calculated.

Key words: Flux field; Axial flux distribution; Lateral flux distribution