

正则连通图直径的上界

徐保根

(基础课部)

摘 要

设 n 和 K 为自然数 (nK 为偶数), $n > K \geq 2$, G 为任意一个 n 阶 K -正则的连通图. 本文给出了图 G 的直径的上界, 并说明了此界对于适当的 n 和 K 是可达的.

关键词: 正则图; 连通图; 直径

0 引 言

本文所指的图均为无向单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, $\bar{G}$ 表示 G 的补图, $d(G)$ 表示图 G 的直径. 对于 $v \in V(G)$, $N_G[v]$ 表示 v 点在 G 中的闭邻域.

若 G_1 和 G_2 为两个无公共点的图, 则 $G_1 + G_2$ 定义为: $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$ 文中未说明的符号、术语同于文[1].

1 正则连通图直径的上界分析

命题 1 若 G 为 n 阶 K -正则连通图, 则:

(1) $K = n - 1$ 时, $d(G) = 1$;

(2) $K = 2$ 时, $d(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$;

(3) $\frac{n-1}{2} \leq K < n-1$ 时, $d(G) = 2$.

证: (1) 和 (2) 是显然的. 只要证 (3): 若 $d(G) \geq 3$, 则 G 中存在两点 u 和 v , 它们在 G 中的距离不小于 3, 故 $N_G[u] \cap N_G[v] = \emptyset$, G 为 K -正则图. 从而: $n = |V(G)| \geq |N_G[u]| + |N_G[v]| = K + 1 + K + 1 = 2K + 2$. 这与条件 $\frac{n-1}{2} \leq K$ 矛盾. 命题 1 证毕.

对于任意一个 n 阶 K -正则连通图, 我们分析其直径的界限. 由上述命题, 只需要再考虑 $3 \leq K \leq \frac{n-3}{2}$ 这一情况.

本文于 1993 年 4 月 12 日收到

定理 1 若 G 为 n 阶 K -正则的连通图, 且 $3 \leq K \leq \frac{n-3}{2}$, 则图 G 的直径

$$d(G) \leq \begin{cases} \frac{3(n-2)}{K+1} - 1 & K \text{ 为奇数;} \\ \frac{3(n-3)}{K+1} - 1 & K \text{ 为偶数且 } K \neq 4; \\ \frac{3n-13}{5} & K = 4 \end{cases} \quad (*)$$

证: 不妨设 G 为所有 n 阶 K -正则连通图中直径最大的一个图, 并记 $d(G)=d$.

(1) 当 K 为奇数时; ($3 \leq K \leq \frac{n-3}{2}$)

此时, 定理中 (*) 式变为:

$$d(G) \leq \frac{3(n-2)}{K+1} - 1 \quad (A)$$

(a) 若 $d \equiv 0 \pmod{3}$; 设 $d=3t$; ($t \geq 1$)

则 G 中存在一条长为 d 的道路, 记之为

$$u_0 - u_1 - u_2 - u_3 - \cdots - u_{3t},$$

并使得 u_0 和 u_{3t} 两点在 G 中的距离为 $3t$.

可见:

$$N_G[u_{3i}] \cap N_G[u_{3j}] = \emptyset. \quad (0 \leq i \neq j \leq t)$$

由于 G 为 K -正则, 故 $|N_G[u_{3i}]| = K+1$.

从而

$$n = |V(G)| \geq \sum_{i=0}^t |N_G[u_{3i}]| = (t+1)(K+1).$$

即有 $t \leq \frac{n}{K+1} - 1$; $d=3t \leq \frac{3n}{K+1} - 3 = \frac{3n-2K-2}{K+1} - 1$, 注意到 $K \geq 3$, 故 (A) 式成立, 且此时 (A) 式中等号不能达到.

(b) 若 $d \equiv 1 \pmod{3}$, 由条件 $K \leq \frac{n-3}{2}$, 故 $d \neq 1$. 设 $d=3t+1$ ($t \geq 1$), G 中存在一条长为 $3t+1$ 的道路: $u_0 - u_1 - u^* - u_2 - u_3 - \cdots - u_{3t}$. 并且 u_0 和 u_{3t} 两点在 G 中的距离 $d(u_0, u_{3t}) = 3t+1$. 类似于 (a), 但 u^* 点不属于任何一个 $N_G[u_{3i}]$ ($i=0, 1, 2, \dots, t$). 故有 $n \geq (K+1)(t+1)+1$. 即有 $t \leq \frac{n-1}{K+1} - 1$; $d=3t+1 \leq 3\left(\frac{n-1}{K+1} - 1\right) + 1 = \frac{3n-K-4}{K+1} - 1$. 注意到 $K \geq 3$, 从而有 $d < \frac{3(n-2)}{K+1} - 1$. 即 (A) 式成立, 且此时等号不能达到.

(c) 若 $d \equiv 2 \pmod{3}$.

当 $d=2$ 时, (A) 式是成立的. 事实上, 由于 $K \leq \frac{n-3}{2}$, 故 $n \geq 2K+3 > K+3$. 从而 (A) 式右端

$$\frac{3(n-2)}{K+1} - 1 > 2 = d.$$

不妨设 $d=3t+2$ ($t \geq 1$). G 中存在长为 d 的道路 $u_0 - u_1 - u^{(1)} - u^{(2)} - u_2 - u_3 - \cdots - u_{3t}$, 且使 u_0 与 u_{3t} 两点在 G 中的距离为 $d=3t+2$. 同 (b) 类似, 我们有 $n \geq (K+1)(t+1)+2$.

即 $t \leq \frac{n-2}{K+1} - 1$; $d = 3t + 2 \leq 3\left(\frac{n-2}{K+1} - 1\right) + 2$,

从而 $d \leq \frac{3(n-2)}{K+1} - 1$. 此时 (A) 式成立.

综合上述 (a), (b) 和 (c) 得知: 定理 1 中 (*) 式当 K 为奇数时 ($3 \leq K \leq \frac{n-3}{2}$), 是成立的.

(2) 当 K 为偶数 ($K \neq 4$) 时, 此时定理 1 中 (*) 式为

$$d(G) \leq \frac{3(n-3)}{K+1} - 1 \quad (B)$$

(a₁) 若 $d \equiv 0 \pmod{3}$, 同 (a) 一样, 得到

$$d \leq \frac{3n-2K-2}{K+1} - 1 < \frac{3(n-3)}{K+1} - 1. \quad (K > 3)$$

(b₁) 若 $d \equiv 1 \pmod{3}$, 同 (b) 一样, 得到

$$d \leq \frac{3n-K-4}{K+1} - 1 < \frac{3(n-3)}{K+1} - 1. \quad (K \geq 6)$$

(c₁) 若 $d \equiv 2 \pmod{3}$, ($K \geq 6$, K 为偶数)

当 $d=2$ 时, (B) 式是成立的. 事实上, 由于 $K \leq \frac{n-3}{2}$, 故 $n \geq 2K+3 > K+4$. 从而 (B) 式右端

$$\frac{3(n-3)}{K+1} - 1 > 3 - 1 = 2 = d$$

不妨设 $d=3t+2$ ($t \geq 1$), G 中存在一条长为 d 的道路 $u_0-u_1-u^{(1)}-u^{(2)}-u_2-u_3-\dots-u_t$. u_0 与 u_t 两端点在 G 中的距离为 $d=3t+2$.

$$N_G[u_i] \cap N_G[u_j] = \emptyset \quad (0 \leq i \neq j \leq t)$$

故 $n = |V(G)| \geq \sum_{i=0}^t |N[u_i]| + 2 = (K+1)(t+1) + 2$.

下证 $n \neq (K+1)(t+1) + 2$.

反证 若 $n = (K+1)(t+1) + 2$, 则 G 中任意一点 (除 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 之外) 均属于某个 $N_G[u_i]$ ($i=0, 1, 2, \dots, t$). 而在 G 中与 u_0 相距为 2 或 3 的点显然不在任何 $N_G[u_i]$ 中, 故与 u_0 相距为 2 的点只有 $u^{(1)}$, 与 u_0 相距为 3 的点只有 $u^{(2)}$. 从而 G 中一条边 $e=u^{(1)}u^{(2)}$ 为 G 的一条桥 (割边), G 为 K -正则连通图. $G-e$ 有两个分支, 其中 u_0 点所在的分支中各顶点的度数之和为 $S=K(K+2)-1$ 为奇数. 因 K 为偶数, 矛盾. 故 $n \neq (K+1)(t+1) + 2$. 从而 $n \geq (K+1)(t+1) + 3$.

即 $t \leq \frac{n-3}{K+1} - 1$; $d = 3t + 2 \leq \frac{3(n-3)}{K+1} - 1$.

综合 (a₁), (b₁) 和 (c₁), 得知 (B) 式成立.

(3) 当 $K=4$ 时,

由上述 (a₁), (b₁) 和 (c₁) 得知

当 $d \equiv 0 \pmod{3}$ 时

$$d < \frac{3(n-3)}{K+1} - 1 < \frac{3n-13}{5}; \quad (K=4)$$

当 $d \equiv 1 \pmod{3}$ 时

$$d \leq \frac{3n - K - 4}{K + 1} - 1 = \frac{3n - 13}{5};$$

当 $d \equiv 2 \pmod{3}$ 时

$$d \leq \frac{3(n - 3)}{K + 1} - 1 < \frac{(3n - 13)}{5}$$

总结上述 (1), (2) 和 (3), 完成了定理 1 的证明.

2 可达上界的图例

定理 2 对于任意给定整数 $K \geq 3$, 则存在无穷多个 $n \geq 2K + 3$, 使得有 n 阶 K -正则连通图 G , 满足

$$d(G) = \begin{cases} \frac{3(n-2)}{K+1} - 1; & K \text{ 为奇数;} \\ \frac{3(n-3)}{K+1} - 1; & K \text{ 为偶数 } (K \neq 4); \\ \frac{3n-13}{5} & K = 4 \end{cases}$$

证根据 K 的不同情况分别构造图类.

(1) 若 K 为奇数 ($K \geq 3$).

令 $G_0 \cong G_t \cong (K_1 \cup K_2) + H_{K-1}$;

$G_i \cong K_{K+1} - e, \quad (i = 1, 2, \dots, t-1)$

其中 K_x 表示 x 阶完全图, H_{K-1} 表示 $K-1$ 阶完全图中去掉 $\frac{K-1}{2}$ 条独立边所得到的图. $K_{K+1} - e$ 表示 $K+1$ 阶完全图中去掉一条边得到的图.

显然, G_0 和 G_i 分别只有一个 $K-1$ 度的点, 其余点的度均为 K . G_i 中 ($i = 1, 2, \dots, t-1$) 只有两个 $K-1$ 度的点 (且它们在 G_i 中不相邻), 其余各点的度均为 K . 将这 $t+1$ 个 G_j ($j = 0, 1, \dots, t$) 如下联结

$$G_0 - G_1 - G_2 - \dots - G_t,$$

并使得所得到的图 G 为 K -正则连通图. 不难验证 $n = |V(G)| = 2(K+2) + (t-1)(K+1) = (K+1)(t+1) + 2$,

并且 $d(G) = 3t + 2$.

比较以上两式得

$$d(G) = \frac{3(n-2)}{K+1} - 1.$$

由 t 的任意性 ($t \geq 1$), 故存在无穷多个 n , 使上式成立.

(2) 若 K 为偶数 ($K \geq 6$).

令 $G_0 \cong (K_2 \cup K_3) - \bar{C}_{K-2}$, 其中 $\bar{C}_{K-2}$ 表示一个 $K-2$ 圈的补图. 显然 G_0 中恰有两个 $K-1$ 度的点, 其余点的度均为 K .

令 $G_i \cong (K_1 \cup K_3) - H_{K-2}$, 其中 H_{K-2} 表示一个 $K-2$ 阶完全图中去掉 $\frac{K-2}{2}$ 条独立边

所得的图. 可见 G_t 中恰有一个 $K-2$ 度的点, 其余各点的度均为 K . ($t \geq 1$)

对于每个 $i=1, 2, \dots, t-1$, 令 G_i 表示一个 $K+1$ 阶完全图中去掉两条相关联的边而得到的图. 可见, G_i 中恰有一个 $K-2$ 度点和两个 $K-1$ 度点, 其余各点的度均为 K . 将上述 $t+1$ 个 G_j 联结:

对于每个 $j=0, 1, 2, \dots, t-1$, 将 G_j 中的两个 $K-1$ 度点均同 G_{j+1} 中唯一的 $K-2$ 度点邻接. 这样所得到的 K -正则连通图为 G . 不难验证

$$n = |V(G)| = K+3 + K+2 + (t-1)(K+1) = (K+1)(t+1) + 3.$$

$$\text{并且 } d(G) = 3t+2.$$

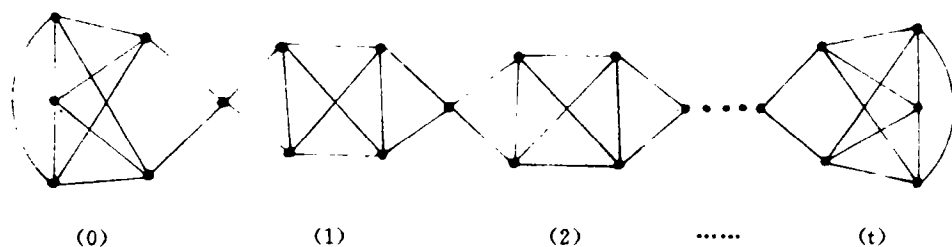
比较以上两式得:

$$d(G) = \frac{3(n-3)}{K+1} - 1.$$

由 t 的任意性 ($t \geq 1$), 故存在无穷多个 n , 使上式成立.

(3) 当 $K=4$ 时,

图 G 可如下图所构造:



$$\text{不难看出 } n = |V(G)| = 5(t+1) + 1 = 5t+6,$$

$$d(G) = 3t+1$$

$$\text{比较以上两式得 } d(G) = \frac{3n-13}{5}.$$

至此, 我们完成了定理 2 的证明.

定理 2 表明了定理 1 中所给出的 $d(G)$ 的上界不能再改进 (除 (*) 式右端取整之外). 定理 2 的证明中所构造的 n 阶 K -正则图是一类具有最大直径的 n 阶 K -正则连通图. 认识这类图的结构对于研究连通图的平均距离的上界是有益的.

参 考 文 献

- [1] F·哈拉里. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980
- [2] 何文杰等. 链状正则图的平均距离. 应用数学, 1991, 4 (2): 28~34

The Upper Bound for the Diameter of a Regular Connected Graph

Xu Baogen

ABSTRACT

Let n and K be two integers such that $n > K \geq 2$, G be a K -regular connected graph with order n . This paper obtains the upper bound for the diameter of G . And states that the upper bound can arrive for some n and K .

Key words: Regular graph; Connected graph; Diameter