赋拟范空间的若干性质

龚代华

（基础课部）

摘　要

本文给出了一种特殊拟范数——次范数的定义．讨论了次范数与范数之关系，并证明了赋次范空间中线性算子的连续与有界的等价性，Hahn—Banach 定理及推论，最后给出了次范数为范数的条件．

关键词：次范数；次 Banach 空间；最小控制参数

赋范线性空间的许多性质对于赋拟范线性空间一般不成立，例如在赋拟范线性空间中，连续算子不一定是有界算子，因此，无法建立以算子范数为度量的空间．因而，赋范空间的许多性质也就无法成立．然而，下面定义的一种特殊赋拟范线性空间却具有赋范线性空间的绝大多数性质．

定义　设 $\|\cdot\|$ 是定义在数域 K 上的线性空间 E 上的拟范数，满足

$$B|\partial|\,\|x\| \leqslant \|\partial x\| \leqslant A|\partial|\,\|x\|. \qquad \forall\, x\in E \quad \partial\in K$$

这里 A、B 为常数且 $A>0$，$B>0$；$\|\cdot\|$ 称为 E 上的次范数；$(E,\ \|\cdot\|)$ 相应地称为赋次范空间．若 $(E,\ \|\cdot\|)$ 完备则称之为次 Banach 空间．A，B 称为控制参数．

定理 1　记 $M=\inf\{A|A>0,\ \|\partial x\|\leqslant A|\partial|\,\|x\|\ \forall\ x\in E,\ \partial\in K\}$；$m=\sup\{B|B>0,\ \|\partial x\|\geqslant B|\partial|\,\|x\|,\ \forall\, x\in E,\ \partial\in K\}$，则

$$m|\partial|\,\|x\| \leqslant \|\partial x\| \leqslant M|\partial|\,\|x\|. \tag{1}$$

且 $m=\dfrac{1}{M}$，M 称为最小控制参数．

证　$\forall\ A\in\{A|A>0,\ \|\partial x\|\leqslant A|\partial|\,\|x\|,\ \forall\, x\in E,\ \partial\in K\}$．

$\forall\, x_0\neq 0\in E$，　　$\partial_0\neq 0\in K$．

$$\|\partial_0 x_0\| \leqslant A|\partial_0|\,\|x_0\|.$$

$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\leqslant A,$$

本文于 1993 年 11 月 25 日收到

故　$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\leqslant \inf\{A \mid A>0,\ \|\partial x\|\leqslant A|\partial|\,\|x\|,\ x\in E,\ \partial\in K\},$$

即　$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\leqslant M.$$

由 ∂_0，x_0 的任意性有

$$\|\partial x\|\leqslant M|\partial|\,\|x\|. \tag{2}$$

$\forall\ B\in\{B \mid B>0,\ \|\partial x\|\geqslant B|\partial|\,\|x\|,\ \forall\ \partial\in,\ x\in E\}$. $\forall\ x_0\neq 0\in E$. $\partial_0\neq 0\in K$，则

$$\|\partial_0 x_0\|\geqslant B|\partial_0|\,\|x_0\|,$$

$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\geqslant B,$$

故　$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\geqslant \sup\{B \mid B>0,\ \|\partial x\|\geqslant B|\partial|\,\|x\|,\ \forall\ \partial\in K,\ x\in E\}.$$

即　$$\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}\geqslant m.$$

于是　$$\|\partial x\|\geqslant m|\partial|\,\|x\|. \tag{3}$$

结合（2），（3）有

$$m|\partial|\,\|x\|\leqslant\|\partial x\|\leqslant M|\partial|\,\|x\|.\qquad \forall\ x\in E,\ \partial\in K.$$

下面说明

$$M=\sup_{\substack{x\neq 0\\ \partial\neq 0}}\frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}.$$

$\partial\neq 0$，$x\neq 0$ 时，由（2）有

$$\frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}\leqslant M.$$

因而　$$\sup_{\substack{x\neq 0\\ \partial\neq 0}}\frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}\leqslant M. \tag{4}$$

对$\forall\ \varepsilon>0$，由 M 的定义，必存在 $\partial_0\neq 0$，$x_0\neq 0$. 满足

$$\|\partial_0 x_0\|\geqslant (M-\varepsilon)\,|\partial_0|\,\|x_0\|.$$

于是　$$\sup_{\substack{\partial\neq 0\\ x\neq 0}}\frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}\geqslant\frac{\|\partial_0 x_0\|}{|\partial_0|\,\|x_0\|}>M-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\sup \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|} \geqslant M, \tag{5}$$

由（4）（5）即有

$$M = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \partial \neq 0}} \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}. \tag{6}$$

同理可证

$$m = \inf_{\substack{x \neq 0 \\ \partial \neq 0}} \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}. \tag{7}$$

$\forall\ \partial \neq 0$，$x \neq 0$，由（6）式

$$M \geqslant \frac{\left\|\frac{1}{\partial}\partial x\right\|}{\left|\frac{1}{\partial}\right|\,\|x\|} = \frac{|\partial|\,\|x\|}{\|\partial x\|},$$

于是 $$\frac{1}{M} \leqslant \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|},$$

因而 $$\frac{1}{M} \leqslant \inf_{\substack{\partial \neq 0 \\ x \neq 0}} \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|} = m. \tag{8}$$

又由（7）式

$$m \leqslant \frac{\left\|\frac{1}{\partial}\partial x\right\|}{\left|\frac{1}{\partial}\right|\,\|\partial x\|} = \frac{|\partial|\,\|x\|}{\|\partial x\|},$$

即 $$\frac{1}{m} \geqslant \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|},$$

$$\frac{1}{m} \geqslant \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \partial \neq 0}} \frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|} = M, \tag{9}$$

由（8）（9）即有

$$\frac{1}{m} = M \quad 或 \quad m = \frac{1}{M}.$$

由定理 1，以下我们可将（E，$\|\cdot\|$）简记为 $E(M)$

定理 2 若 $M \leqslant 1$，则（E，$\|\cdot\|$）中的次范数 $\|\cdot\|$ 为范数．

证 $\frac{1}{M}|\partial|\,\|x\| \leqslant \|\partial x\| \leqslant M|\partial|\,\|x\|$， $\forall\ \partial \in K$，$x \in E$

$\forall\ x_0 \neq 0 \in E$，$\partial = 1$，

则 $$\frac{1}{M}\|x_0\| \leqslant \|x_0\| \leqslant M\|x_0\|,$$

即　　$\frac{1}{M}\leqslant 1\leqslant M$，

于是　　$M\geqslant 1$.

而　　$M\leqslant 1$，

故　　$M=1$，$\|\cdot\|$ 为范数.

推论 1　$E(M)$ 的子空间 S 亦为赋次范空间 $S(M')$，且 $M'\leqslant M$.

$M>1$ 时，$\|\cdot\|$ 不是范数.

例　设 $(E,\|\cdot\|)$ 是一赋范线性空间，在 E 上定义

$$\|x\|_1=\begin{cases}2\|x\|, & \|x\|\leqslant 1\\ 2-C+C\|x\|, & \|x\|>1\end{cases}$$

这里 C 为常数，$1<C<2$，则 $\|\cdot\|_1$ 为 E 上的次范数且 $M=\frac{2}{C}$.

先证对 $\forall\ x, y\in E$ 有 $\|x+y\|_1\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$，分以下几种情形验证

Ⅰ　$\|x+y\|\leqslant 1$ 时：

(a) 若 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，

则　　$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1=2\|x\|+2\|y\|-2\|x+y\|\geqslant 0$.

(b) 若 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|>1$，

则　　$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1$

$=2\|x\|+2-c+c\|y\|-2\|x+y\|$

$\geqslant 2\|x\|+2-c+c\|y\|-2$

$=2\|x\|+c(\|y\|-1)\geqslant 0$.

(c) 若 $\|x\|>1$，$\|y\|\leqslant 1$，

同 (b)，易证　　$\|x+y\|_1\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$.

(d)　若 $\|x\|>1$，　$\|y\|>1$，

$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1$

$=2-c+c\|x\|+2-c+c\|y\|-2\|x+y\|$

$=(2-c)(2-\|x+y\|)+c(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|)>0$.

Ⅰ 当 $\|x+y\|>1$ 时：

(a) 若 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|\leqslant 1$，

$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1$

$=2\|x\|+2\|y\|-[2-c+c\|x+y\|]$

$=c(\|x\|+\|y\|-\|x+y\|)+(2-c)(\|x\|+\|y\|-1)\geqslant 0.$

(b) 若 $\|x\|\leqslant 1$，$\|y\|>1$ 或 $\|x\|>1$，$\|y\|\leqslant 1$，

$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1$

$=2\|x\|+2-c+c\|y\|-[2-c+c\|x+y\|]$

$=(2-c)\|x\|+c[\|x\|+\|y\|-\|x+y\|]\geqslant 0$.

(c) 若 $\|x\|>1$，$\|y\|>1$，

$\|x\|_1+\|y\|_1-\|x+y\|_1$

$=2-c+c\|x\|+2-c+c\|y\|-[2-c+c\|x+y\|]$

$=2-c+c[\|x\|+\|y\|-\|x+y\|]\geqslant 0$.

显然 $\|x\|_1=0 \Longleftrightarrow \|x\|=0 \Longleftrightarrow x=0$，

$\|-x\|_1=\|x\|_1$.

下面证明

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，则对 $\forall\ \partial\in K$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\partial x_n\|_1=0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \partial_n=0$，则对 $\forall\ x\in E$，$\lim\limits_{n\to\infty}\|\partial_n x\|=0$.

不妨设 $\partial\neq 0$，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，故存在 N，当 $n>N$ 时

$\|x\|\leqslant\min\{1,\ \frac{1}{2|\partial|},\ \frac{\varepsilon}{2|\partial|}\}$.

于是 $\|\partial x_n\|_1=2|\partial|\|x_n\|<\varepsilon$.

即 $$\lim_{n\to\infty}\|\partial x_n\|_1=0 \ .$$

同理可证 $\partial_n\to 0$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\|\partial_n x\|_1=0$.

最后说明 $\|\cdot\|_1$ 为次范数并求 M，设 $\partial\neq 0$，$x\neq 0$，分以下几步讨论.

I $\|\partial x\|\leqslant 1$ 时：

(a) 若 $\|x\|\leqslant 1$，

$$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=\frac{2|\partial|\ \|x\|_1}{|\partial|2\|x\|}=1 \ .$$

(b) 若 $\|x\|>1$，则

$$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=\frac{2|\partial|\ \|x\|}{|\partial|\ (2-c+c\|x\|)}=\frac{2|\partial|\ \|x\|}{(2-c)\ |\partial|+c|\partial|\ \|x\|}$$

$$\leqslant\frac{2|\partial|\ \|x\|}{c|\partial|\ \|x\|}=\frac{2}{c} \ .$$

取 $$\partial_0=\frac{1}{\|x\|},$$

则 $$\frac{\|\partial_0 x\|_1}{|\partial_0|\ \|x\|_1}=\frac{2}{c+\dfrac{2-c}{\|x\|}} .$$

故 $$\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{\|\partial_0 x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=\frac{2}{c},$$

即 $$\sup_{\substack{\|\partial x\|\leqslant 1\\ \|x\|>1}}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=\frac{2}{c} \ .$$

又 $$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=\frac{2|\partial|\ \|x\|}{|\partial|\ (2-c+c\|x\|)}=\frac{2|\partial|\ \|x\|}{|\partial|(2-c)\ +c|\partial|\ \|x\|}$$

$$\geqslant\frac{2|\partial|\ \|x\|}{(2-c)\ |\partial|\ \|x\|+|\partial|c\|x\|}=1,$$

取 $$\partial_0=\frac{1}{\|x\|},$$

$$\frac{\|\partial_0 x\|_1}{|\partial_0|\ \|x\|}=\frac{2}{\dfrac{2-c}{\|x\|}+c} .$$

$$\lim_{\|x\|\to 1}\frac{\|\partial_0 x\|_1}{|\partial_0|\ \|x\|}=1 .$$

故 $$\inf_{\substack{\|\partial x\|\leqslant 1\\ \|x\|>1}}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\ \|x\|_1}=1.$$

Ⅱ $\|\partial x\|>1$ 时：

(a) 若 $\|x\|\leqslant 1$，则

$$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{2-c+c|\partial|\,\|x\|}{|\partial|2\,\|x\|}$$

$$\leqslant\frac{(2-c)\ |\partial|\,\|x\|+c|\partial|\,\|x\|}{|\partial|2\,\|x\|}=1,$$

$$\lim_{\|\partial x\|\to\pm\infty}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=1,\quad 故\quad \sup_{\substack{\|\partial x\|>1\\ \|x\|<1}}\frac{\|\partial x\|}{|\partial|\,\|x\|}=1.$$

又 $$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}\geqslant\frac{c|\partial|\,\|x\|}{2|\partial|\,\|x\|}=\frac{c}{2},$$

$$\lim_{\|\partial x\|\to+\infty}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{c}{2},\quad 故\inf_{\|\partial x\|>1}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{c}{2}.$$

(b) 若 $\|x\|>1$，则

$$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{2-c+c|\partial|\,\|x\|}{|\partial|\ [2-c+c\,\|x\|]}$$

$$\leqslant\frac{(2-c)\ |\partial|\,\|x\|+c|\partial|\,\|x\|}{c|\partial|\,\|x\|}=\frac{2|\partial|\,\|x\|}{c|\partial|\,\|x\|}=\frac{2}{c},$$

$$\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}\geqslant\frac{c|\partial|\,\|x\|}{|\partial|(2-c)\,\|x\|+c|\partial|\,\|x\|}=\frac{c}{2}.$$

结合Ⅰ，Ⅱ有

$$M=\sup_{\substack{x\neq 0\\ \partial\neq 0}}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{2}{c},$$

$$m=\inf_{\substack{x\neq 0\\ \partial\neq 0}}\frac{\|\partial x\|_1}{|\partial|\,\|x\|_1}=\frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2}|\partial|\,\|x\|_1\leqslant\|\partial x\|_1\leqslant\frac{2}{c}|\partial|\,\|x\|_1\ .$$

显然 $\|\cdot\|$ 不是范数，$\forall\ \|x_0\|=1$，$\|x_0\|_1=2$，$\|2x_0\|_1=2-c+2c=2+c<2\,\|x_0\|_1$.

故 $$\|\partial x\|_1\neq|\partial|\,\|x\|_1$$

定理3 设 T 为一个 $E_1(M_1)\to E_2(M_2)$ 的线性算子，则 T 连续 $\Longleftrightarrow T$ 有界.

证 $\Leftarrow$ 显然[1].

$\Rightarrow$ 假设 T 无界，则 $\exists\ x_n\neq 0\in E_1$，使

$$\|Tx_n\|_2\geqslant n\,\|x_n\|_1,$$

即　$\dfrac{\|Tx_n\|_2}{n\|x_n\|_1}\geqslant 1$,

因为　$\dfrac{1}{M_2}\dfrac{\|Tx_n\|_2}{n\|x_n\|_1}\leqslant\left\|\dfrac{Tx_n}{n\|x_n\|_1}\right\|_2\leqslant M_2\dfrac{\|Tx_n\|_2}{n\|x_n\|_1}$,

故　$$\left\|T\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right\|_2\geqslant\frac{1}{M_2}\ .\tag{10}$$

又　$\left\|\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right\|_1\leqslant M_1\dfrac{1}{n\|x_n\|_1}\|x_n\|_1=\dfrac{M_1}{n}$,

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n\|x_n\|_1}=0$.

由 T 之连续性

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T\frac{x_n}{n\|x_n\|_1}\right\|_2=0,$$

与（10）矛盾，故 T 为有界算子．

定理 4　以 $\beta(E_1, E_2)$ 记为所有 $E_1(M_1)\to E_2(M_2)$ 的连续算子，其范数定义为

$$\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1},\qquad \forall\, T\in\beta(E_1, E_2)\ .$$

则 $\|\cdot\|$ 为 $\beta(E_1, E_2)$ 上的次范数，且

$$\frac{1}{M}|\partial|\,\|T\|\leqslant\|\partial T\|\leqslant M|\partial|\,\|T\|,$$

$$M\leqslant\min\{M_1, M_2\}\ .$$

证　显然 $\|\cdot\|$ 为 $\beta(E_1, E_2)$ 上的拟范数，下面说明 $\|T\|$ 为次范数并求最小控制参数 M.

$\forall\,\partial\in K, \partial\neq 0, T\neq 0\in\beta(E_1, E_2)$,（假定 E_1, E_2 非空，可以证明 $\beta(E_1, E_2)\neq\{0\}$.）

因　$\|\partial T\|=\sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}}\dfrac{\|(\partial T)\ x\|_2}{\|x\|_1}=\sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}}\dfrac{\|\partial Tx\|_2}{\|x\|_1}$,

由于　$\dfrac{1}{M_2}|\partial|\,\|Tx\|_2\leqslant\|\partial Tx\|_2\leqslant M_2|\partial|\,\|Tx\|_2$,

故　$\dfrac{1}{M_2}|\partial|\,\|T\|\leqslant\|\partial T\|\leqslant M_2|\partial|\,\|T\|$.

又　$\|\partial T\|=\sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}}\dfrac{\|T\ (\partial x)\ \|_2}{\|x\|_1}=\sup\limits_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}}\dfrac{\|T\ (\partial x)\ \|_2}{\|\frac{1}{\partial}\partial x\|_1}$

$$\leqslant \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}} \frac{\| T(\partial x)\|_2}{\frac{1}{M_1}\frac{1}{|\partial|}\|\partial x\|_1} \leqslant M_1|\partial| \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in E_1}} \frac{\| T(\partial x)\|_2}{\|\partial x\|_1} = M_1|\partial|\,\|T\|,$$

故　$$\|\partial T\| \leqslant M_1|\partial|\,\|T\|.$$

$$M=\sup_{\substack{T\neq 0\\ \partial\neq 0}} \frac{\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}}{\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1}} \leqslant \min\{M_1, M_2\}.$$

推论 2　设有 $E_1(M_1)$，若对$\forall$ $E_2(M_2)$ 都有：

$$\forall\ x_0\neq 0\in E_1(M_1),\quad \exists\ T_0\neq 0\in\beta(E_1, E_2),$$

满足　$$\|Tx_0\|_2=\|T_0\|\ \|x_0\|,$$

则　$$M_1=1.$$

证　取 $E_2(M_2)$ 为一赋范线性空间，即 $M_2=1$，$\forall\ x_0\neq 0\in E_1$，$\exists\ T_0\neq 0\in\beta(E_1, E_2)$，

使
$$\|T_0x_0\|_2=\|T_0\|\ \|x_0\|_1,$$
$$\|T_0\partial x_0\|_2\leqslant\|T_0\|\ \|\partial x_0\|_1,$$

而　$$\|T_0\partial x_0\|_2=\|\partial Tx_0\|_2=|\partial|\,\|Tx_0\|=|\partial|\,\|T_0\|\ \|x_0\|,$$

故　$$|\partial|\,\|T_0\|\ \|x_0\|_1\leqslant\|T_0\|\ \|\partial x_0\|_1,$$

$$|\partial|\,\|x_0\|_1\leqslant\|\partial x_0\|_1.$$

于是　$$m_1\geqslant 1,$$

而　$$m_1<1,\ (M_1>1,\ m_1=\frac{1}{M_1})$$

故　$m_1=1$　因而 $M_1=1$.

推论 3　设有 $E_1(M_1)$，$E_2(M_2)$，若 M_1，M_2 中之一等于 1，则 $\beta(E_1,E_2)$的最小控制参数为 1.

证　由定理 4

$$M\leqslant\min\{M_1,M_2\}=1,$$

而　$M\geqslant 1$，故 $M=1$.

推论 3 表明一定条件下 $M=\min\{M_1,M_2\}$，对很多具体的 $E_1(M_1)$，$E_2(M_2)$ 等式都成立．因此猜测 $M=\min\{M_1,M_2\}$ 普遍成立．

定理 5　设 $E(M)$ 是赋次范线性空间，满足

(1) 若 $\partial\in K$，$|\partial|=1$，则 $\|\partial x\|=\|x\|$；

(2) 存在 $C>0$，使集合

$A=\{x|\ \|x\|\leqslant c\}$ 为凸集，

若 G 是 E 的一个复子空间，f 是 G 上的连续线性泛函，则存在 E 上的一个连续线性泛函 F 满足：

(1) $F(x)=f(x)$；　　$\forall\ x\in G$

(2) $\|f\|\leqslant\|F\|\leqslant M^2\|f\|$．

证　由拟范数性质知 A 是吸收的，下面说明 A 是平衡的．

$\forall\ \partial\in K$，$\|\partial\|\leqslant 1$ 及 $\forall\ x\in A$，因 $\partial=|\partial|e^{\theta}$，由条件(1)知 $e^{\theta}x\in A$，又 A 是凸集，而 $\theta\in A$，故，$\partial x=|\partial|e^{\theta}x+(1-|\partial|)\theta\in A$，即 A 是平衡的．

定义　$p(x)=\inf\limits_{\substack{\partial>0\\ \partial^{-1}x\in A}}\partial$

则 $p(x)$ 满足

(1) $p(x)\geqslant 0$，　$p(0)=0$；

(2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

(3) $p(\partial x)=|\partial|p(x)$；

(4) $\dfrac{c}{M}p(x)\leqslant\|x\|\leqslant Mcp(x)$．　　(11)

(1)、(2)、(3) 见文献〔2〕，(4) 的证明如下

若 $a>0$，$\|\frac{1}{a}x\|\leqslant c$，则 $\frac{1}{M}\frac{1}{|a|}\|x\|\leqslant\|\frac{1}{a}x\|\leqslant c$．

即　$\|x\|\leqslant Mca$，

故 $$\|x\| \leqslant Mc \inf_{\substack{a>0 \\ a^{-1}x\in A}} a = Mcp(x). \tag{12}$$

又 $$\left\|\frac{c}{M\|x\|}x\right\| \leqslant M\frac{c}{M\|x\|}\|x\| = c.$$

于是 $$\frac{1}{Mc^{-1}\|x\|}x\in A.$$

因此 $$p(x) \leqslant Mc^{-1}p(x),$$

即 $$\|x\| \geqslant \frac{1}{M}cp(x). \tag{13}$$

$\forall x\in G$，$|f(x)| \leqslant \|f\|\ \|x\| \leqslant Mc\|f\|p(x)$，由 Hahn－Banach 定理[3]，存在 E 上的线性泛函 F，满足

(1) $F(x)=f(x)$；　　$\forall\ x\in G$

(2) $|F(x)| \leqslant Mc\|f\|p(x)$；

由（13）式 $|F(x)| \leqslant M^2\|f\|\ \|x\|$，

故 $$\|f\| \leqslant \|F\| \leqslant M^2\|f\|.$$

定理 6 设有复 E（M）满足：$\exists$ E 上的半范数 $p(x)$，$c>0$ 使 $x\in A=\{X\mid \|x\|\leqslant c\ x\in E\}$ 时，

$$Ap(x) \leqslant \|x\| \leqslant Bp(x). \qquad (A,\ B>0)$$

则定理 5 仍成立.

证 $\forall x\in E$

$$\left\|\frac{cx}{M\|x\|}\right\| \leqslant M\frac{c}{M\|x\|}\|x\| = c,$$

故 $$\frac{1}{M}\frac{c\|x\|}{M\|x\|} \leqslant \left\|\frac{cx}{M\|x\|}\right\| \leqslant BP\left(\frac{cx}{M\|x\|}\right) = B\frac{c}{M\|x\|}p(x).$$

$$\|x\| \leqslant MBp(x).$$

又 $$M\frac{c}{M\|x\|}\|x\| \geqslant \left\|\frac{cx}{M\|x\|}\right\| \geqslant AP\left(\frac{cx}{M\|x\|}\right) = \frac{Ac}{M\|x\|}p(x),$$

故 $$\|x\| \geqslant \frac{A}{M}p(x).$$

于是 $$\frac{1}{M}Ap(x) \leqslant \|x\| \leqslant MBp(x).$$

推论 4　设 $E(M)$ 满足定理 5 条件且非空，$\forall\ x_0\neq 0\in E$，必存在 E 上的连续线性泛函 f 满足：

(1) $f(x_0)=\|x_0\|$；

(2) $1\leqslant\|f\|\leqslant M^3$.

证　作 $G=\{ax_0|a\in K\}$，定义 G 上的泛函 f_0 满足：$f_0(ax_0)=a\|x_0\|$，则 $1\leqslant\|f_0\|\leqslant M$. 由定理 5，存在 E 上的线性泛函 f 满足：

(1) $f(x)=f_0(x)$；　　$x\in G$.

(2) $1\leqslant\|f_0\|\leqslant\|f\|\leqslant M^2\|f_0\|\leqslant M^3$.

推论 5　在推论 4 中 $\|f\|=1\Longleftrightarrow M=1$.

证　$\Leftarrow$　显然.

$\Rightarrow$　$\forall\ x_0\in E,\exists\ f$ 满足 $f(x_0)=\|x_0\|,\|f\|=1$,则 $|f(\partial x_0)|\leqslant\|f\|\ \|\partial x_0\|$,

即　$$|\partial||f(x_0)|\leqslant\|f\|\ \|\partial x_0\|=\|\partial x_0\|.$$

$$|\partial|\ \|x_0\|\leqslant\|\partial x_0\|.$$

故　$$M=1.$$

推论 6　设 $E(M)$ 满足定理 5 条件且非空，G 是子空间，$x_0\in E$. 若 $p(x_0,G)=\inf\limits_{x\in G}\|x-x_0\|=\delta>0$，则必存在 E 上的有界线性泛函 f 满足：

$$f(x_0)=1,\qquad f(x)=0\quad\forall\ x\in G,\qquad \frac{1}{\delta}\leqslant\|f\|\leqslant\frac{M^3}{\delta}.$$

证　令 $G_1=\{ax_0+x|a\in K,\ x\in G\}$.

定义　$f_0(ax_0+x)=a,\quad\forall\ ax_0+x\in G_1.$

则　$$f_0(x_0)=1,\qquad \frac{1}{\delta}\leqslant\|f_0\|\leqslant\frac{M}{\delta}.$$

由定理 5，存在 E 上的线性泛函 F 满足

$$f(x)=f_0(x),\qquad x\in G_1.$$

$$\frac{1}{\delta}\leqslant\|f_0\|\leqslant\|f\|\leqslant M^2\|f_0\|\leqslant\frac{M^3}{\delta}.$$

推论 7 在推论 6 中 $\|f\|=\frac{1}{\delta}\Longleftrightarrow M=1.$

证 $M=1$ 显然有 $\|f\|=\frac{1}{\delta}.$

$\forall x_0\neq 0$，取 $G=\{0\}$，则 $\rho(x_0, G)=\|x_0\|=\delta$

由 $$\|f\|=\frac{1}{\delta}=\frac{1}{\|x_0\|},$$

有 $$|f(\partial x_0)|\leqslant\|f\|\ \|\partial x_0\|=\frac{\|\partial x_0\|}{\|x_0\|},$$

即 $$|\partial|\leqslant\frac{\|\partial x_0\|}{\|x_0\|},\qquad |\partial|\ \|x_0\|\leqslant\|\partial x_0\|,$$

故 $$M=1.$$

参 考 文 献

[1] Arlen. Brown, Carl pearcy. Introduction to operator theory I. Springer-Verlag, 1977. 247—248

[2] Kosaku. Yosida. Functional analysis. Springer—Verlag, 1978. 28

[3] Kosaku. Yosida. Functional analysis. Springer—Verlag, 1978. 28—30

Some Properties on Quasi Normed Space

Gong Daihua

ABSTRACT

In this paper we define a special quasi norm-subnorm and discuss the relation between subnorm and norm. We have proved following theorems.

Equivalence of Continuity and boundedness in Subnormed space. Hahn-Banach theorem and its corollaries. At last, we give a condition under which subnorm becomes norm.

Key words: Subnorm; Subnormed space; The least dominated parameter