

一类 SDR 的计数问题

周学松

(基础课部)

摘 要

设 $s_i = \{i, i+1, i+2, \dots, i+n\} (i=1, 2, 3) (n \geq 3)$, 本文给出 s 关于集系 $\{s_i\}_{i=1,2,3}$ 的所有不同的相异代表系 (SDR) 的总数的简明通解式: $n^3 + 3n$.

关键词: 相异代表系; 矩阵恒久量

1 引言和定理

设 s 是一个任意的集合, $p(s)$ 是 s 的子集族. 设 $M(s) = (s_1, s_2, \dots, s_m)$, 其中 $s_i \in p(s)$. 如果当 $i=1, 2, \dots, m$ 时, $a_i \in s_i$, 且对任何 $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, 当 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, 别称 m 元集合 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 是 $M(s)$ 的一个 SDR (相异代表系). 虽然可以通过 s 关于集系 $\{s_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ 的关联矩阵 A 的恒久量 $\text{per}(A)$ 来求 SDR 的总个数, 但 $\text{per}(A)$ 的计算常常很繁琐, 这可由下面的定理 1 可见.

定理 1 (Ryser) 设 X 是 $m \times n (m \leq n)$ 矩阵, Ar 是矩阵 A 中 r 个列的各元素用零代换所得到的一个矩阵, 以 $S(Ar)$ 表示矩阵 Ar 中每行各元素之和的乘积, 以 $\sum_s(Ar)$ 表示当 r 固定时, 对于所有的矩阵, 乘积 $S(Ar)$ 之和, 则下列关系式成立:

$$\begin{aligned} \text{per}(A) = & \sum_s(A_{n-m}) - \binom{n-m+1}{1} \sum_s(A_{n-m+1}) + \binom{n-m+2}{2} \sum_s(A_{n-m+2}) \\ & - \dots + (-1)^{m-1} \binom{n-1}{m-1} \sum_s(A_{n-1}). \end{aligned}$$

于是, 找出求 SDR 的简明通解式是必要的. B. Ross 对于用 $\text{mod } n (n \geq 3)$ 约简的整数集 $s_i = \{i, i+1, i+2\} (i=1, 2, \dots, n)$ 找到计算这个集系的不同 SDR 的个数是 $L_n + 2$, 其中 L_n 表示第 n 个 Lucas 数.

本文讨论了另一特殊集系的 SDR 的计数问题, 其主要结果是:

定理 2 设 $s_i = \{i, i+1, i+2, \dots, i+n\} (i=1, 2, 3) (n \geq 3)$. 则关于集系 $\{s_i\}_{i=1,2,3}$ 的所有不同的 SDR 的总数 $N(s_1, s_2, s_3, n+1)$ 有如下公式:

本文于 1993 年 4 月 2 日收到

* 校自然科学基金资助

$$N(s_1, s_2, s_3, n+1) = n^3 + 3n.$$

2 定理的证明

对 n 行数学归纳法. $n = 3$ 时, 一方面有:

$$N(s_1, s_2, s_3, 3+1) = 3^3 + 3^2 = 36 \quad (1)$$

另一方面, 我们可先视 $\bigcap_{i=1}^3 s_i = \emptyset$, 由定理 1 或排列公式很易知道, 此时集系 $\{s_i\}_{i=1,2,3}$ 的代表系的总数为 $4^3 = 64$. 为了求出所有不同的 SDR 的总个数, 还须除去其中有重复的代表系, 由下面集系:

$$s_1 = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$s_2 = \{2, 3, 4, 5\};$$

$$s_3 = \{3, 4, 5, 6\}.$$

可见, 在 s_1 中取 1, s_2, s_3 中分别取 3, 3; 4, 4; 5, 5; 得 3 个有重复的代表系.

在 s_1 中取 2, s_2, s_3 中分别取 2, 3; 2, 4; 2, 5; 2, 6; 和 3, 3; 4, 4; 5, 5; 得 $4 + 3 = 7$ 个有重复的代表系.

在 s_1 中取 3, s_2, s_3 中分别取 3, 3; 3, 4; 3, 5; 3, 6; 和 2, 3; 4, 3; 5, 3; 及 4, 4; 5, 5; 得 $4 + 3 + 2 = 9$ 个有重复的代表系.

在 s_1 中取 4, s_2, s_3 中分别取 4, 3; 4, 4; 4, 5; 4, 6; 和 2, 4; 3, 4; 5, 4; 及 3, 3; 5, 5; 得 $4 + 3 + 2 = 9$ 个有重复的代表系.

除以上四种情况外, 再无其它可能的有重复的代表系. 即有重复的代表系共有 $3 + 7 + 9 + 9 = 28$ 个.

于是, 所有不同的 SDR 的个数为 $64 - 28 = 36$ 个, 与 (1) 式不谋而合.

故 $n = 3$ 时结论成立.

假设 $n = k - 1$ 时结论成立. 即有

$$N(s_1, s_2, s_3, (k-1)+1) = (k-1)^3 + 3(k-1).$$

下面来证明 $n = k$ 时结论也成立

对下面集系

$$s_1 = \{1, 2, 3, \dots, k, (k+1)\};$$

$$s_2 = \{2, 3, 4, \dots, (k+1), (k+2)\};$$

$$s_3 = \{3, 4, 5, \dots, (k+2), (k+3)\}. \quad (*)$$

分如下四种情况来讨论其不同的 SDR 的个数.

情况 1 先讨论集系 (*) 中前 K 列组成的集系:

$$s_1 = \{1, 2, 3, \dots, k\};$$

$$s_2 = \{2, 3, 4, \dots, (k+1)\};$$

$$s_3 = \{3, 4, 5, \dots, (k+2)\}.$$

中不同的 SDR 的个数. 由归纳假设很易知道, 此时有 $(k-1)^3 + 3(k-1)$ 个不同的 SDR 的个数.

情况2 其次讨论下面集系:

$$\begin{aligned}s_1 &= \{k+1\}; \\ s_2 &= \{2, 3, 4, \dots, (k+1), (k+2)\}; \\ s_3 &= \{3, 4, 5, \dots, (k+2), (k+3)\}.\end{aligned}$$

中所有不同的 SDR 的总数.

此时, 所有可能的代表系的总数显然为 $(k+1)^2$ 个. 下面还须除去其中有重复的代表系的个数, 这相当于在 s_1 中取 $k+1$, 在 s_2, s_3 中分别取 $k+1, 3; k+1, 4; \dots; k+1, k+1; k+1, k+2; k+1, k+3$ 和 $2, k+1; 3, k+1; \dots; k, k+1; k+2, k+1$; 及 $3, 3; 4, 4; 5, 5; \dots; k, k; k+2, k+2$; 共有 $(k+1) + [(k+1)-1] + [(k+1)-2] = 3k$ 个有重复的代表系.

那么不同的 SDR 的总数为 $(k+1)^2 - 3k = k^2 - k + 1$

情况3 还要讨论下面集系

$$\begin{aligned}s_1 &= \{1, 2, 3, \dots, k\}; \\ s_2 &= \{k+2\}; \\ s_3 &= \{3, 4, 5, \dots, (k+2), (k+3)\}.\end{aligned}\quad (*)$$

中所有不同的 SDR 的个数.

此时, 所有可能的代表系的总数显然为 $k(k+1)$ 个. 为求不同的 SDR 的个数, 还须从这 $k(k+1)$ 个代表系中除去有重复的代表系的个数.

这相当于在 s_2 中取 $k+2$, 在 s_1, s_3 中 $1, k+2; 2, k+2; \dots, k, k+2$ 和 $3, 3; 4, 4; \dots, k, k$; 共 $k + (k-2) = 2k-2$ 个有重复的代表系.

于是, 不同的 SDR 的总数为 $k(k+1) - 2k + 2 = k^2 - k + 2$.

情况4 最后讨论下面集系

$$\begin{aligned}s_1 &= \{1, 2, 3, \dots, (k-1), k\}; \\ s_2 &= \{2, 3, 4, \dots, k, (k+1)\}; \\ s_3 &= \{k+3\}.\end{aligned}$$

中所有不同的 SDR 的个数.

此时所有可能的代表系的总数显然为 k^2 个, 这其中有重复的代表系的个数相当于在 s_3 中取 $k+3$, 在 s_1, s_2 中分别取 $2, 2; 3, 3; \dots; k, k$; 共 $k-1$ 个.

于是, 所有不同的 SDR 的个数为 $k^2 - k + 1$.

除上述四种情况外, 别无其它可能性. 于是最后得到 $n=k$ 时, 集系 $\{s_i\}_{i=1,2,3}$ 的所有不同 SDR 的总数为:

$$\begin{aligned}N(s_1, s_2, s_3, k+1) &= [(k-1)^3 + 3(k-1)] + (k^2 - k + 1) + (k^2 - k + 2) + (k^2 - k + 1) \\ &= (K^3 - 3k^2 + 3k - 1) + (3k - 3) + 3k^2 - 3k + 4 \\ &= k^3 + 3k\end{aligned}$$

得证命题.

3 结束语

由下面定理:

设 $s_1, s_2, \dots, s_m$ 是一 n 元集合 s 的子集, 且 $m \leq n$. 若 A 是 s 的元素对这些子集的关联矩阵, 那么, $M(s) = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ 的 SDR 的个数就是 $\text{per}(A)$. 可知, 对于形如:

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{n+1} \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \end{pmatrix} \quad (n \geq 3)$$

的矩阵, 我们有

$$\text{per}(A) = n^3 + 3n.$$

这比起用定理 1 来求这样的 $\text{per}(A)$ 要简洁得多.

那么对于 $s_i = \{i, i+1, i+2, \dots, i+n\} (i=1, 2, \dots, m) (n \geq m)$, 此时关于集系 $\{s_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ 的所有不同的 SDR 的总数有否直接公式来求呢? 我们说, $m=4$ 时, 情况就比 $m=3$ 时的要复杂得多, 更不须说 $m=5, 6, \dots$ 等情况. 但我们猜想, 它们之间有某种递推关系.

参 考 文 献

- [1] I. TOMESCU. 组合学引论. 北京: 高等教育出版社, 1985
- [2] 柯召, 魏万迪. 组合论. 北京: 科学出版社, 1981
- [3] ROSS, B. A Lucas number counting problem. Fibonacci Quart., 1972, 10, 325—328

The Counting Problem of SDR

Zhou Xuesong

ABSTRACT

Let $s_i = \{i, i+1, i+2, \dots, i+n\} (i=1, 2, 3, n \geq 3)$. This paper presents a formula $n^3 + 3n$ on the counting of the systems of distinct representatives of sets $\{s_i\}_{i=1,2,3}$.

Key words: Systems of distinct representatives; Permanents of matrices