

# K-空间仿紧性的一个注记

汪火云

(基础课部)

## 摘 要

一个  $K'$  空间 (Frechet 空间) 是仿紧的当且仅当它是正则的弱  $\theta Rf$  且有性质  $\sigma\kappa$  ( $\sigma\omega$ ); 一个  $K$ -空间 (序列空间) 是仿紧  $\iff$  它是正则的弱  $\theta Rf$  且有性质  $\sigma$  强  $\kappa$  ( $\sigma$  强  $\omega$ ), 改进了 [3], [4] 中的部分结果.

关键词:  $K$ -空间; 仿紧性;  $\sigma\kappa$  ( $\sigma$  强  $\kappa$ );  $\sigma\omega$  ( $\sigma$  强  $\omega$ )

以下空间均为  $T_1$  型的. 令  $K$  表示空间  $X$  的紧子集的全体,  $CS$  表示空间  $X$  中形如  $\{P_\alpha, P\}_{\alpha=1}^\infty$  的子集全体, 其中  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_\alpha = P$ ; 又如  $U = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ , 则记  $U^* = \bigcup \{U_\alpha: \alpha \in A\}$ , 若  $B \subset X$ , 则记  $(U)_B = \bigcup \{U_\alpha: U_\alpha \cap B \neq \emptyset, \alpha \in A\}$ .

空间  $X$  中的集簇  $U = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$  称为紧有限 ( $CS$  有限的)<sup>[1]</sup>, 如果对每个  $K \in K$  ( $K \in CS$ ),  $(U)_K$  有限.

空间  $X$  中的集簇  $U = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$  称为强紧有限 (强  $CS$  有限) 的<sup>[1]</sup>, 如果  $\bar{U} = \{\bar{U}_\alpha: \alpha \in A\}$  是紧有限 ( $CS$  有限) 的.

$X$  称为紧式 ( $CS$  式) 仿紧空间<sup>[1]</sup>, 如果  $X$  的每个开复盖都有紧有限 ( $CS$  有限) 的加细.

注: 本文中所指的“加细”都有“复盖  $X$ ”的这一性质.

$X$  称为强紧式 (强  $CS$  式) 仿紧空间<sup>[1]</sup>, 如果  $X$  的每个开复盖都有强紧有限 (强  $CS$  有限) 的开加细.

$\sigma$ -强紧式 ( $\sigma$ -强  $CS$  式)、 $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ - $CS$  式) 仿紧空间, 可按照以上定义, 依通常的方式来定义.

空间  $X$  的集簇  $P = \{P_\alpha: \alpha \in A\}$  说是  $F$ -遗传的<sup>[1]</sup>, 若 (I)  $P$  是  $X$  的一个复盖. (II) 对  $X$  中每个闭集  $F$ ,  $\forall \alpha \in A$ , 有  $P_\alpha \cap F \in P$ .

空间  $X$  中所有紧子集全体组成的集簇  $K$  以及空间  $X$  中所有  $\{P_\alpha, P\}_{\alpha=1}^\infty$  ( $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P_\alpha = P$ ) 子集的全体组成的集簇  $CS$  均是  $F$ -遗传集簇.

空间  $X$  说是对集簇  $H$  有  $W$ -弱拓扑<sup>[1]</sup>, 如果  $G$  是  $X$  中开集  $\iff \forall H \in H, G \cap H$  是  $H$  中的开集.

本文于 1993 年 7 月 6 日收到

空间  $X$  说是  $\kappa$ -空间<sup>[1]</sup>  $\Leftrightarrow$  空间  $X$  对紧子集的全体组成的  $F$ -遗传集簇  $K$  有  $W$ -弱拓扑.

空间  $X$  说是序列空间  $\Leftrightarrow$  空间  $X$  对  $\{P_n, P\}_{n=1}^{\infty}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ ) 集的全体组成的  $F$ -遗传集簇  $CS$  有  $W$ -弱拓扑.

引理 1 (I) 在  $\kappa$ -空间中, 每个强紧有限的开集簇  $\{V_\alpha: \alpha \in B\}$  是局部有限的, 是闭包保持的. (II) 在序列空间中, 每个强  $CS$  有限的开集簇  $\{V_\alpha: \alpha \in B\}$  是局部有限的, 是闭包保持的.

证 (I) 设  $X$  是  $\kappa$ -空间, 因而  $X$  对  $K$  (紧子集全体组成的  $F$ -遗传集簇) 有  $W$ -弱拓扑, 而又因为  $\{\bar{V}_\alpha: \alpha \in B\}$  是紧有限 ( $\kappa$ -有限), 因而, 据 [1] 中引理 2.1 知  $\{\bar{V}_\alpha: \alpha \in B\}$  是局部有限, 因而  $\{V_\alpha: \alpha \in B\}$  更是局部有限的, 进而  $\{V_\alpha: \alpha \in B\}$  还是闭包保持的.

(II) 类似 (I) 可证.

定义 1 空间  $X$  具有性质  $\sigma\kappa$  ( $\sigma\omega$  [2]), 如果对  $X$  的任何离散闭集簇  $\{D_\alpha: \alpha \in B\}$  都有  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ - $CS$  有限) 的开集簇  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , 其中对每个  $n$ ,  $U_n = \{U_{n,\alpha}: \alpha \in A\}$  是紧有限 ( $CS$  有限) 的, 且  $\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,\alpha}$ .

定义 2 空间  $X$  具有性质  $\sigma$  强  $\kappa$  ( $\sigma$  强  $\omega$ ), 如果对  $X$  的任何离散闭集簇  $\{D_\alpha: \alpha \in A\}$  都有  $\sigma$ -强紧有限 ( $\sigma$ -强  $CS$  有限) 的开集簇  $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , 其中对每个  $n$ ,  $U_n = \{U_{n,\alpha}: \alpha \in A\}$  是强紧有限 (强  $CS$  有限) 的, 且  $\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{n,\alpha}$ .

显然有下面蕴含关系:

$$\begin{array}{ccc} \sigma \text{ 强 } \kappa & \Rightarrow & \sigma \text{ 强 } \omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma \kappa & \Rightarrow & \sigma \omega \\ \uparrow & & \uparrow \\ \kappa & \Rightarrow & \omega \end{array}$$

( $\kappa, \omega$  的定义分别见文 [4], [3])

但  $\sigma\kappa \not\Rightarrow \kappa, \sigma\omega \not\Rightarrow \omega$ , 见文后的例子.

再介绍文 [5] 中出现的弱  $\theta Rf$  的概念. 空间  $X$  是弱  $\theta Rf$ , 如果对  $X$  的开复盖  $\mathcal{U}$  都存在开加细  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ , 且  $\forall x \in X$  存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得:  $0 < \text{ord}(x, U_n) < \infty$ ;  $\{U_n^*: n \in \mathbb{N}\}$  是点有限的.

引理 2 设  $D = \{D_\alpha: \alpha \in A\}$  为离散闭集簇,  $U$  为紧有限 ( $CS$  有限) 开集簇,  $\forall U \in U$  至多有一个  $D_\alpha$  与  $U$  相交.  $\forall \alpha \in A$ , 令  $U_\alpha = \{U \in U: U \cap D_\alpha \neq \emptyset\}$ ,  $U_0 = \{U \in U, U \cap D_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in A\}$ ; 又令  $G_\alpha = U_\alpha^*$ ,  $G = \{G_\alpha: \alpha \in A\}$ . 则 (1)  $G$  是紧有限 ( $CS$  有限) 的开集簇. (2) 若  $D^* \subset U^*$ , 则  $\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset U_\alpha$ .

证 (1)  $\forall G_\alpha \in G$ , 由  $G_\alpha$  的构造知,  $G_\alpha$  开于  $X$ ,  $\forall U \in U, U$  只可能属于某个唯一的  $U_\alpha$ , 或者属于  $U_0$ , 因此  $\{U_\alpha^*: \alpha \in A, \alpha = 0\}$  构成  $U$  的一个分解. 由于  $U$  是紧有限 ( $CS$  有限的), 知  $G$  亦是紧有限 ( $CS$  有限) 的.

(2) 若  $D^* \subset U^*$ , 则  $\forall \alpha \in A$ , 有  $D_\alpha \subset \bigcup \{V \in U: U \cap D_\alpha \neq \emptyset\} = U_\alpha^* = G_\alpha$ .

引理 3 设  $X$  是  $\kappa$ - (序列) 空间, 设  $D = \{D_\alpha: \alpha \in A\}$  为离散的闭集簇,  $U$  为强紧有限 (强  $CS$  有限) 的开集簇,  $\forall U \in U$ , 至多有一个  $D_\alpha \in D$  与  $U$  相交.  $\forall \alpha \in A$ , 令  $U_\alpha = \{U \in U, U \cap D_\alpha \neq \emptyset\}$ ,  $U_0 = \{U \in U, U \cap D_\alpha = \emptyset, \forall \alpha \in A\}$ ; 令  $G_\alpha = U_\alpha^*$ ,  $G = \{G_\alpha: \alpha \in A\}$ . 则 (1)

$G$  是强紧有限 (强 CS 有限) 的开集簇. (2) 若  $D^* \subset U^*$ , 有  $\forall \alpha \in A, D_\alpha \subset G_\alpha$ .

证 由于本引理中的  $G$  与引理 2 中的  $G$  构造方法类似, 只要证明  $G$  是强紧有限 (强 CS 有限) 就可. 由于据引理 1 在  $\kappa$ - (序列) 空间中, 强紧有限 (强 CS 有限) 的集簇是闭包保持的. 若  $K \in \mathcal{K}$  (CS) 交  $G$  中无限个成员的闭包, 则  $K$  定交  $U$  中无数个成员的闭包. 因而  $G$  是强紧有限 (强 CS 有限) 的.

引理 4<sup>[5]</sup> 设  $\{U_n, n \in N\}$  是  $X$  中开集簇列,  $U_n = \{U_{n,\alpha}; \alpha \in A\}$ , 记  $U = \{U_n; n \in N\}$ , 假定  $U^* = X, \forall i, j \geq 1$ , 令  $P(i, j) = \{x; \text{ord}(x, U) < i \text{ 或 } \text{ord}(x, U) = i, \text{ 但存在 } K \in N; \text{ord}(x, U_K) \leq j\}$ . 若  $V(i, j)$  是任一包含  $P(i, j)$  的开集, 则存在  $\sigma$ -离散的闭集簇  $F = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$ , 使  $F^* = P(i, j+1) \sim V(i, j)$ .

#### 定理 1

(I)  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$ .

(II)  $\kappa$ - (序列) 空间中,  $\sigma$ -强紧式 ( $\sigma$ -强 CS 式) 仿紧空间, 具有性质  $\sigma$  强  $\kappa, \sigma$  强  $\omega$ .

#### 证

(I) 设  $D = \{D_\alpha, \alpha \in A\}$  为  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间  $X$  的离散闭集簇. 则  $\forall x \in X$ , 存在邻域  $W(x)$  至多与一个  $D_\alpha$  相交. 令  $W = \{W(x); x \in X\}$ , 则  $W$  是  $X$  的一个开复盖, 由假设存在一个  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开加细  $\bigcup_{n=1}^\infty U_n$ , 其中  $\forall n \in N, U_n$  是紧有限 (CS 有限) 的. 据引理 2,  $\forall n \in N$ , 作出  $G_n = \{G_{n,\alpha}; \alpha \in A\}$ . 由于  $U_n$  是紧有限的 (CS 有限的), 知  $G_n$  是紧有限 (CS 有限) 的.

令  $G_n = \bigcup_{\alpha=1}^\infty G_{n,\alpha}$ , 显然有:  $D_\alpha \subset G_n$  (因为:  $\bigcup_{n=1}^\infty U_n$  复盖  $X$ , 故  $D^* \subset (\bigcup_{n=1}^\infty U_n)^* = \bigcup_{n=1}^\infty U_n^*$ , 更有  $D_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^\infty U_n^*$ ;  $\forall x \in D_\alpha$ , 则存在  $n \in N$ , 使得  $x \in U_n^*$ , 由  $U_{n,\alpha}$  的构造知:  $x \in (U_{n,\alpha})^* = G_{n,\alpha}$ , 故  $D_\alpha \subset \bigcup_{\alpha=1}^\infty G_{n,\alpha}$ ).

(II) 证明类似 (I) (用引理 3).

#### 定理 2

(I) 每个具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$  的弱  $\theta$ Rf 空间是  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间.

(II) 每个具有性质  $\sigma$  强  $\kappa$  ( $\sigma$  强  $\omega$ ) 的弱  $\theta$ Rf 空间是  $\sigma$ -强紧式 ( $\sigma$ -强 CS 式) 仿紧空间.

#### 证

(I) 设  $X$  为具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$  的弱  $\theta$ Rf 空间, 设  $G$  为  $X$  的一个开复盖, 由条件知, 存在弱  $\theta$ Rf 加细  $\bigcup_{n=1}^\infty U_n$ , 即  $\forall x \in X$ , 存在  $n \in N$ , 使得  $0 < \text{ord}(x, U_n) < \infty$ , 且  $\{U_n^*, n \in N\}$  是点有限, 由 [5] 中引理 4 证中后面注, 令  $P(1, 0) = V(1, 0) = \emptyset$ , 存在  $\sigma$ -离散的闭集簇  $F(1) = \bigcup_{k=1}^\infty F_k(1)$ , 使  $F^*(1) = P(1, 1) \setminus V(1, 0) = P(1, 1)$ . 由  $X$  具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$ , 对每一个  $F_k(1)$  都有  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 开集簇  $\bigcup_{n=1}^\infty V_{k,n}(1)$  复盖  $F_k^*(1)$ , 注意到 [5] 中引理 4 证中每个  $F(B, K)$  都包含在某个  $U_{k,n}$  内, 故不妨假定  $\bigcup_{n=1}^\infty V_{k,n}(1)$  的每一个元含于  $G$  的某个元内, 于是  $\bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty V_{k,n}(1)$  复盖  $P(1, 1) \setminus V(1, 0)$ . 令  $V(1, 1) = (\bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty V_{k,n}(1))^*$ , 又由引理 4 知, 存在  $\sigma$ -离散的闭集簇  $F(2) = \bigcup_{k=1}^\infty F_k(2)$ , 使  $F^*(2) = P(1, 2) \setminus V(1, 1)$ . 再由  $X$  具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$  知, 存在  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 开集簇  $\bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty V_{k,n}(2)$  复盖  $F^*(2)$ , 其每一个元均含于  $G$  的某个元内.

令  $V(1,2) = (\bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(j))^*$ , 则  $V(1,2) \supset [P(1,2) \setminus V(1,1)] \cup V(1,1) \supset P(1,2)$ . 再由引理 4 可作出覆盖  $P(1,3) \setminus V(1,2)$  的  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开集簇  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(3)$ , 其每一个元都含于  $G$  的某个元内, 依次类推, 可作出  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(j)$  复盖  $\bigcup_{i=1}^{\infty} [P(1,j) \setminus V(1,j-1)]$ , 但  $\forall j, P(1,j) \subset V(1,j)$ , 故  $(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{i,k}(j))^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(1,j) \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} P(1,j)$ .

可令  $P(2,0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} P(1,j)$ ,  $V(2,0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(1,j)$ . 又由引理 4 知,  $P(2,1) \setminus V(2,0)$  可表示为  $\sigma$ -离散闭集簇之并, 从而相应地作出  $V(2,1)$ , 这样可以递归地作出复盖  $P(2,1) \setminus V(2,0)$ ,  $P(2,2) \setminus V(2,1), \dots, P(2,j) \setminus V(2,j-1)$  的  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开集簇, 其每一个元都含于  $G$  的某个元内. 令  $P(3,0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} P(2,j)$ ,  $V(3,0) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(2,j)$ . 重复上述推理, 最后得复盖  $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(i,0)$  的  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开集簇 (因为每个  $P(i,0)$  都有  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开加细). 由于  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  是  $G$  的弱  $\theta$ Rf 加细, 故  $\bigcup_{i=1}^{\infty} P(i,0) = X$ . 这就证明了, 对  $X$  的任一开复盖, 都有  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开加细, 故  $X$  是  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间.

(II) 证明与 (I) 类似.

### 定理 3

(I) 一个  $\kappa'$ -空间<sup>[1]</sup> (Frechet 空间<sup>[1]</sup>) 是仿紧的  $\Leftrightarrow$  它是正则的弱  $\theta$ Rf 且有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$ .

(II) 一个  $\kappa$  空间 (序列空间) 是仿紧的  $\Leftrightarrow$  它是正则的弱  $\theta$ Rf 且有性质  $\sigma$  强  $\kappa(\sigma$  强  $\omega)$ .

证

(I) “ $\Rightarrow$ ”由定理 1 是显然的, “ $\Leftarrow$ ”设  $U$  是  $X$  的任一开复盖, 由定理 2 知,  $X$  是  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间, 故  $U$  有  $\sigma$ -紧有限 ( $\sigma$ -CS 有限) 的开加细  $W$ . 由 [1] 中引理 3.3 及引理 3.4 知,  $W$  是  $\sigma$ -闭包保持的, 又由  $X$  是正则的知  $X$  是仿紧的.

(II) 证明与 (I) 类似. (用引理 1)

最后, 我们看一个例子.

例 [2] 中的例 1, 设  $X$  是任意一个不可数集, 规定  $X$  的拓扑  $J$  如下:  $G$  为  $X$  中开集当且仅当  $X \setminus G$  是有限集或可数集. [5] 中指出  $X$  是  $T_1$  的 lindelöf 空间, 从而是  $\sigma$ -紧式 ( $\sigma$ -CS 式) 仿紧空间. 因此具有性质  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$ , 但  $X$  不是点态集体正规, 从而更不具有性质  $\kappa(\omega)$ .

因此, 定理 3 (I) 改进了 [4] 中的推论 3.6. 由于 “正规 + 性质  $\kappa$ ”  $\Rightarrow$  “ $\sigma$  强  $\kappa$ ” (显然的). 故可得:

推论 1 一个  $T_2$  的  $\kappa$ -空间是仿紧的  $\Leftrightarrow$  它是正规的弱  $\theta$ Rf 且有性质  $\kappa$ .

这个推论改进了 [3] 中定理 10 (注: [3] 文中所有空间都预先假定是  $T_2$  的).

感谢江西师大陈清煊教授的指导!

## 参 考 文 献

- [1] J. R. Boone. Some characterizations of paracompactness in  $\kappa$ -spaces. Fund Math 72 (1971): 145—155  
[2] 吴利生. 关于紧式仿紧空间. 江苏师院学报, 1981, (1): 6—10  
[3] J. R. Boone. A note on mesocompact and sequentially mesocompact spaces. Pacific. J. Math 14 (1973): 69—74  
[4] J. R. Boone. A metrization theorem for developable spaces. Fund. Math. 73 (1971): 79—83  
[5] 戴牧民.  $\sigma$ 按点簇正规性,  $\sigma$ -亚紧性和 $\sigma$ -按点有限基. 数学学报, 1981, (5): 656—667

A Note on Paracompactness in  $\kappa$ -Spaces

Wang Huoyun

## ABSTRACT

In this paper, the concepts of  $\sigma\kappa$  ( $\sigma\omega$ ),  $\sigma$  strongly  $\kappa$  ( $\sigma$  strongly  $\omega$ ) are introduced, and the characterizations of paracompactness in  $\kappa'$ -spaces (Frechet spaces),  $\kappa$ -spaces (sequential spaces) are obtained. A  $\kappa'$ -spaces (Frechet) is paracompact iff it's regular weakly  $\bar{\theta}Rf$  with property  $\sigma\kappa(\sigma\omega)$ ; A  $\kappa$ -spaces (sequential spaces) is paracompact iff it's regular weakly  $\bar{\theta}Rf$  with property  $\sigma$  strongly  $\kappa$  ( $\sigma$  strongly  $\omega$ ).

**Key words:**  $\kappa$ -Spaces; Paracompactness;  $\sigma\kappa$  ( $\sigma$  strongly  $\kappa$ );  $\sigma\omega$  ( $\sigma$  strongly  $\omega$ )