

优美图的扩充

徐保根

(基础课部)

摘 要

本文主要介绍几种优美图的扩充方法,并以此来判断某些图的优美性.

关键词:优美图;扩充;优美值

0 引 言

对于一个无向单图 $G = (V, E)$, 如果对每一点 $v \in V$, 存在一个非负整数 $\theta(v)$, 使得满足条件:

- (1) $\forall u, v \in V$, 如果 $u \neq v$, 则 $\theta(u) \neq \theta(v)$;
- (2) $\max \{ \theta(v) \mid v \in V \} = |E|$;
- (3) $\forall e_1, e_2 \in E$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $\theta'(e_1) \neq \theta'(e_2)$.

其中 $\theta'(e) = |\theta(u) - \theta(v)|$, $e = uv$. 则称图 G 为优美图, 称 θ 为 G 的一个优美值或优美标号. 对于优美图 G 的一个优美值 θ , 则 $\bar{\theta}(v) = |E| - \theta(v)$ 也是 G 的一个优美值, 称之为 θ 的共轭优美值, 用 $\bar{\theta}$ 记之.

对于优美图 G 的一个优美值 θ , 必有唯一的 $v_0 \in V$, 使得 $\theta(v_0) = 0$, 则称 v_0 点为图 G 在 θ 下的基点. 对于 G 的不同优美值, 一般基点也不同. 如果说 v_0 是 G 的基点, 是指 v_0 点在 G 的某个优美值下为基点.

定义 设 s 是不小于 1 的整数, θ 是优美图 G 的一个优美值, 令: $A_s(G) = \{v \mid \text{对于任意一个 } i \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \text{有 } v \in V(G), \text{使 } \theta(v) = i\}$. 则称 $A_s(G)$ 为图 G 在 θ 下的一个基序集.

对于任意一个优美图 G , 其基序集一定存在, 但并非唯一. 若 $A_s(G)$ 为 G 的一个基序集, 当 $1 \leq t \leq s$ 时, $A_t(G)$ 也是 G 的基序集. 对于任意一个优美图 $G \neq K_1$, G 的最大基序集中至少有两个点. $A_s(G)$ 有时简记为 $A(G)$. 非优美图的基序集为空集.

上述未加定义的符号、术语同于文献 [1].

本文于 1993 年 4 月 30 日收到.

1 优美图的链状扩充

引理1 设 $A(G)$ 是 P 阶优美图 G 的一个基序集, v_0 为 G 外一点, 将 v_0 点分别邻接于 $A(G)$ 中各点得到一个 $P+1$ 阶图 G' , 则 G' 优美. 且 v_0 点为 G' 的基点.

证 设 $A(G)$ 是 G 在其优美值 θ 下的基序集, 定义 G' 的优美值 θ' 如下:

$$\theta'(v) = \begin{cases} \theta(v), & v \in V(G), \\ |E(G)| + |A(G)|, & v = v_0. \end{cases}$$

容易验证 θ' 为 G' 的一个优美值, 故 G' 优美. 且 v_0 点为 G' 在 θ' 下的基点. 证毕.

引理2 若图 G 优美, v_0 为其基点, 在 v_0 点增加任意条悬挂边得到图 G' , 则 G' 优美, 且新增加的悬挂点集的非空子集为 G' 的基序集.

证 设新增加的点集 $M = \{m_i | i=0, 1, \dots, m-1\}$, M 的子集不妨记为 $M_1 = \{m_i | i=0, 1, \dots, s-1\}$, 其中 $1 \leq s \leq m$. v_0 为 G 在其优美值 θ 下的基点.

$$\text{令 } \theta'(v) = \begin{cases} \theta(v), & v \in V(G), \\ |E(G)| + m - i, & v = m_i (i=0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

不难验证: θ' 为 G' 的优美值, 故 G' 优美. 且 M_1 为 G' 在 θ' 下的一个基序集. 证毕.

由上述两个引理, 任何一个优美图均可以从其某顶点(基点)或其某顶点集(基序集)按上述方法不断向外链状扩充, 得到更多的优美图. 因此有

定理1 (1) 任何毛虫树^[2]的一路端粘接(使之重合)于优美图的某顶点(基点), 得到优美图.

(2) 设有 m 个星 $S_i = K_{1,n_i}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 如果将 S_i 中的若干悬挂点一对一地粘接 S_{i+1} 中的悬挂点, ($i=1, 2, \dots, m-1$), 得到一个连通图 G , 则图 G 优美.

上述定理可由引理1和引理2直接得证.

2 优美图的和式扩充

若 G_1 和 G_2 表示两个无公共点的图, 则 $G_1 + G_2$ 表示在 $G_1 \cup G_2$ 中, 再将 G_1 的各点分别与 G_2 的每一点均邻接所得的图, 即为 $\bar{G}_1 \cup \bar{G}_2$ 的补图.

定理2 若 (p, q) 一图 G 优美, $m \geq 1$, 则

(1) 当 $n \geq q - p + 1$ 时, $(G \cup \bar{K}_n) + \bar{K}_m$ 优美.

(2) 当 $n = q - p + 1$ 时, $S \geq 0$ 时, $(G \cup \bar{K}_n) + (K_{1,m} \cup \bar{K}_n)$ 优美.

证(1) 令 $n_0 = q - p + 1$, (显然 $n_0 \geq 0$), θ 为 G 的一个优美值, $A = [0, q] \setminus \{\theta(v) | v \in V(G)\}$, 可见 $|A| = n_0$, 将图 $(G \cup \bar{K}_n) + \bar{K}_m$ 的顶点如下标号 θ' : 对 G 的每个顶点 v , 令 $\theta'(v) = \theta(v)$. 对 $\bar{K}_n$ 中的 n_0 个顶点标号分别取 A 中不同整数, 其余 $n - n_0$ 个顶点标号分别为: $q+1, q+2, \dots, q+n-n_0$. 而 $q+n-n_0 = n+p-1$. 故 $G \cup \bar{K}_n$ 的顶点标号取遍了 $[0, n+p-1]$ 中的全部 $n+p$ 个整数.

记 $V(\bar{K}_m) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

令 $\theta'(u_i) = q + i(n+p)$, $(i=1, 2, \dots, m)$.

不难验证 θ' 是图 $(G \cup \bar{K}_n) + \bar{K}_m$ 的优美标号, 即 $(G \cup \bar{K}_n) + \bar{K}_m$ 为优美图. 证 (1) 完毕.

证 (2) 令 $H = (G \cup \bar{K}_n) + (K_{1,m} \cup \bar{K}_n)$,

对 H 的顶点作如下标号 θ_1 :

对于 $G \cup \bar{K}_n$ 中的顶点标号同于 (1) 中的 θ' 所标的号. 因 $n = q - p + 1$, 故 $G \cup \bar{K}_n$ 的顶点标号取遍了 $[0, q]$ 中的全部 $q+1$ 个整数, 当然, $G \cup \bar{K}_n$ 中边的标号取遍了 $[1, q]$ 中全部 q 个整数.

记 $V(K_{1,m}) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 其中 x_0 为 $K_{1,m}$ 的中心点.

令 $\theta_1(x_0) = (m+1)(q+1) + m + q$,

$\theta_1(x_i) = (i+1)q + 2i$, $(i=1, 2, \dots, m)$.

若 $s=0$, 即 $H = (G \cup \bar{K}_n) + K_{1,m}$, 则 H 的顶点标号完毕. 可见, 此时 θ_1 为 H 的优美标号.

若 $s \geq 1$, 记 $V(\bar{K}_s) = \{t_1, t_2, \dots, t_s\}$.

令 $\theta_1(t_i) = \theta_1(x_0) + i \cdot (q+1)$, $(i=1, 2, \dots, s)$, 不难验证, 此时 θ_1 为 H 的优美标号. 综合上述, 定理 2 证毕.

作为定理 2 的直接推论, 我们有

推论 2.1 若 T 为优美树, m 为自然数, 则

(1) $T + \bar{K}_m$ 优美,

(2) $T + K_{1,m}$ 优美.

推论 2.2 若 G 为连通的单圈优美图, 则

(1) $(G \cup K_1) + \bar{K}_m$ 优美,

(2) $(G \cup K_1) + K_{1,m}$ 优美.

由上述定理及其推论, 从已知的优美图出发, 可以构造众多的优美图. 例如: $K_{1,m} + K_{1,n}$; $K_1 + K_{m,n}$ ($= K_{1,m} + \bar{K}_n$); $K_2 + K_{m,n}$ ($= K_{1,m} + K_{1,n}$); $P_n + K_{1,m}$; $P_n + \bar{K}_m$ 和 $P_m + P_n$ (当 $\min\{m, n\} \leq 3$ 时). 在此不一一列举.

3 若干问题

(A) 众所皆知, 在优美图论中, 有著名的猜想^[3]: 所有树均为优美图. 这一猜想至今没有得到证明或否定. 因此, 可以猜测: 对任意树 T , 均有 $T + \bar{K}_m$ 和 $T + K_{1,m}$ 为优美图.

(B) 我们知道, 当 $n \geq 5$ 时, K_n 不是优美图, 这似乎是由于 K_n 的边数相对于 n 来说“太多了”. 一个自然的问题是:

设 $f(p) = \max\{q \mid \text{存在 } (p, q) \text{ — 优美图}\}$,

由于 $K_{1,n-1}+K_{1,n-1}$ 和 $K_{1,n}+K_{1,n-1}$ 的优美性, 不难看出: 对一切自然数 n , $f(2n) \geq n^2 + 2n - 2$, $f(2n+1) \geq n^2 + 3n - 1$. 能否给出 $f(p)$ 的具体表达式或者建立比上述更好的下界?

(C) 作为推论 2.1(2) 的特款, 我们知道: 当 $\min\{m, n\} \leq 3$ 时, $P_m + P_n$ 为优美图. 是否对一切自然数 m 和 n , 均有 $P_m + P_n$ 优美? 这些问题还有待于进一步探讨.

参 考 文 献

- [1] F·哈拉里. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980
- [2] 马克杰. 优美图. 北京: 北京大学出版社, 1991. 10
- [3] 柳柏濂. 关于优美图的最近结果. 应用数学, 1990, (4): 108~110

The Extension of Graceful Graphs

Xu Baogen

ABSTRACT

This paper introduces mainly several methods of extending graceful graphs, which can be used to find some graceful graphs.

Key words: Graceful graph; Extension; Graceful value