

关于 $T((i_1, n_1^1, n_2^1), (i_2, n_1^2, n_2^2), \dots,$ $(i_m, n_1^m, n_2^m))$ 的 K ——优美性

周学松

(基础课部)

摘 要

本文证明了以塔图 G_{i_j} ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ($i_j \geq 3$)) 为支的图 $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$ 是 K ——优美的。

关键词: 图; 标号; 图论

Slater 和 Thuillier 1982 年相互独立地提出了关于 K ——优美的概念, 当 $K=1$ 时就是通常研究的优美图, 现今已有很多成果. 本文给出了一类以塔图 $G_{i_1}(n_1^1, n_2^1), G_{i_2}(n_1^2, n_2^2), \dots, G_{i_m}(n_1^m, n_2^m)$ 为支的图 $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$ 的 K ——优美标号, 并给出证明.

1 有关定义

定义 1 设 $G=(V, E)$ 是简单图, 若对任一 $v \in V(G)$ 赋于一个非负整数 $f(v)$, 则称图 G 是标定的, $f(v)$ 称为顶点 v 的标号, $|f(u) - f(v)|$ 称为边 $e=uv \in E(G)$ 的标号.

对于正整数 K , 简单图 $G=(V, E)$ 称为是 K ——优美的, 若存在一个单一映射 (记 $|E|+K-1=M$)

$$f: V(G) \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|+K-1=M\},$$

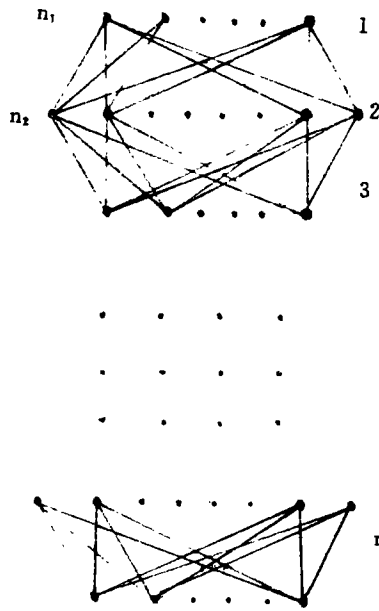
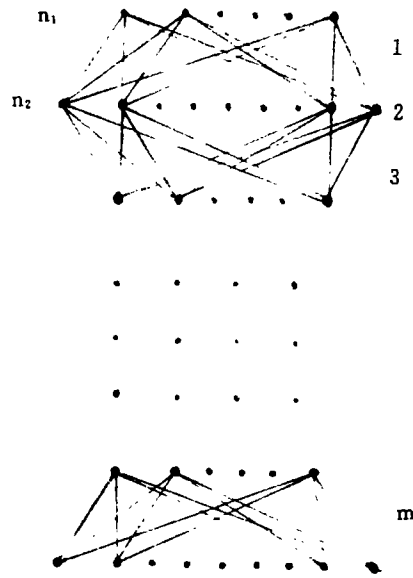
使得对所有边 $e=uv \in E(G)$, 由 $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出的映射

$$f^*: E(G) \longrightarrow \{K, K+1, \dots, |E|+K-1=M\},$$

是一一映射.

定义 2 设 m 是正整数, 把 m 个二部完全图间隔的依次重 n_2 个点和 n_1 个点连结在一起的图 (如图 1, 图 2 所示) 称为塔图, 记作 $G_m(n_1, n_2)$.

本文于 1993 年 9 月 17 日收到

图 1 $G_m(n_1, n_2)$ (m 为偶数)图 2 $G_m(n_1, n_2)$ (m 为奇数)

2 定理及证明

定理 以 $G_{i_1}(n_1^1, n_2^1), G_{i_2}(n_1^2, n_2^2), \dots, G_{i_m}(n_1^m, n_2^m)$ 为支的图 $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$ 是 K —优美的.

其中 n_1^j, n_2^j 为任意正整数, $i_j \geq 3, 1 \leq j \leq m$.

证 设 $i_1, i_2, \dots, i_m$ 中有 α 个偶数, $m - \alpha$ 个奇数, 不失一般性, 可设 $i_1, i_2, \dots, i_\alpha$ 为偶数, $i_{\alpha+1}, \dots, i_m$ 为奇数, 再设 $x_{u,v}^k$ 是 $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 的第 u 行中第 v 点, $[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数.

则 $\forall k \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ 时, $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 的顶点集的标号 f :

$$f(x_{u,v}^k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} ((\frac{i_j}{2} + 1)n_1^j n_2^j - n_2^j - 1) + (\lfloor \frac{u}{2} \rfloor n_1^k + (v-1)n_2^k, & u = 1, 3, 5, \dots, i_k + 1, \\ & v = 1, 2, \dots, n_1^k, \\ M - \sum_{j=1}^{k-1} ((\frac{i_j}{2} - 1)n_1^j n_2^j + n_2^j + 1) - (\lfloor \frac{u}{2} \rfloor - 1)n_1^k - (v-1) & u = 2, 4, 6, \dots, i_k, \\ & v = 1, 2, \dots, n_2^k, \end{cases} \quad (1)$$

$\forall l \in \{1, 2, \dots, m-\alpha\}$ 时, $G_{i_{s+l}}(n_1^{s+l}, n_2^{s+l})$ 的顶点集的标号 f :

$$f(x_{u,v}^{s+l}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^s ((\frac{i_j}{2} - 1)n_1^j n_2^j - n_2^j - 1) + \sum_{j=1}^{l-1} ((\lceil \frac{i_{s+j}}{2} \rceil + 1)n_1^{s+j} n_2^{s+j} - n_2^{s+j} - 1) \\ \quad + (\lceil \frac{u}{2} \rceil)n_1^{s+l} + (v-1)n_2^{s+l}, & \begin{matrix} u = 1, 3, 5, \dots, i_{s+l}, \\ v = 1, 2, \dots, n_1^{s+l} \end{matrix}, \\ M - \sum_{j=1}^s ((\frac{i_j}{2} - 1)n_1^j n_2^j + n_2^j + 1) - \sum_{j=1}^{l-1} ((\frac{i_{s+j}+1}{2} - 1)n_1^{s+j} n_2^{s+j} + n_2^{s+j} + 1) \\ \quad - (\lceil \frac{u}{2} \rceil - 1)n_1^{s+l} n_2^{s+l} - (v-1), & \begin{matrix} u = 2, 4, 6, \dots, i_{s+l} + 1, \\ v = 1, 2, \dots, n_2^{s+l} \end{matrix}, \end{cases} \quad (1)$$

第一步先看 f 是 $V(T) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, M\}$ 的单射.

这是因为 $\forall k, (1 \leq k \leq \alpha)$, 由 (1) 知 $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 的顶点的标号值恰好构成两个严格单调数列 (由 (1) 得).

一是由 $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 中奇数行的点的标号值恰好构成逐次增加 n_2^k 的严格的增加数列.

$$f(x_{1,1}^k) < f(x_{1,2}^k) < \dots < f(x_{1,n_1^k}^k) < f(x_{3,1}^k) < f(x_{3,2}^k) < \dots < f(x_{3,n_1^k}^k) \\ < \dots < f(x_{i_k+1,1}^k) < f(x_{i_k+1,2}^k) < \dots < f(x_{i_k+1,n_1^k}^k). \quad (1)$$

二是由 $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 中偶数行的点的标号值恰好构成分行逐项减 1 的严格减少数列.

$$f(x_{2,1}^k) > f(x_{2,2}^k) > \dots > f(x_{2,n_2^k}^k) > f(x_{4,1}^k) > f(x_{4,2}^k) > \dots > f(x_{4,n_2^k}^k) \\ > \dots > f(x_{i_k,1}^k) > f(x_{i_k,2}^k) > \dots > f(x_{i_k,n_2^k}^k). \quad (2)$$

(注意: $f(x_{2u-2,n_2^k}^k) - f(x_{2u-1,1}^k) \stackrel{(1)}{=} (\lceil \frac{2u}{2} \rceil - 1)n_1^k n_2^k - (\lceil \frac{2u-2}{2} \rceil - 1)n_1^k n_2^k - (n_2^k - 1) = n_1^k n_2^k - n_2^k + 1 > 0$ 与 u 无关, 只与 k 有关).

再由

$$f(x_{i_k,n_2^k}^k) - f(x_{i_k+1,n_1^k}^k) \stackrel{(1)}{=} M - \sum_{j=1}^{k-1} ((\frac{i_j}{2} - 1)n_1^j n_2^j + n_2^j + 1) - (\lceil \frac{i_k}{2} \rceil - 1)n_1^k n_2^k - n_2^k + 1 \\ - \sum_{j=1}^{k-1} ((\frac{i_j}{2} + 1)n_1^j n_2^j - n_2^j - 1) + (\lceil \frac{i_k+1}{2} \rceil)n_1^k n_2^k + n_1^k n_2^k - n_1^k \\ = (K + |E(T)| - 1) - \sum_{j=1}^{k-1} i_j n_1^j n_2^j - i_k n_1^k n_2^k + 1 > 0,$$

即 $f(x_{i_k,n_2^k}^k) > f(x_{i_k+1,n_1^k}^k)$. (3)

由 (1) (2) (3) 知, (1) 定义的 $G_{i_k}(n_1^k, n_2^k)$ 的顶点集的标号值均不相同.

由 (1), 仿上过程, 同理可知, $1 \leq l \leq m-\alpha$ 时, $G_{i_{s+l}}(n_1^{s+l}, n_2^{s+l})$ 的顶点集标号值也是互不相同的.

再因 $\forall k \in \{1, 2, \dots, a\}$,

$$f(x_{i_{k-1}, n_1^{k-1}}^{k-1}) - f(x_{2,1}^k) = f(x_{i_{k-1}, n_2^{k-1}}^{k-1}) - (f(x_{i_{k-1}, n_2^{k-1}}^{k-1}) - 2) = 2 > 0, \quad (4)$$

$$f(x_{i_{k-1}+1, n_1^{k-1}}^{k-1}) - f(x_{1,1}^k) = f(x_{i_{k-1}+1, n_1^{k-1}}^{k-1}) - (f(x_{i_{k-1}+1, n_1^{k-1}}^{k-1}) - 1) = 1 > 0, \quad (5)$$

$$f(x_{i_a, n_1^a}^a) - f(x_{2,1}^{a+1}) = f(x_{i_a, n_2^a}^a) - (f(x_{i_a, n_2^a}^a) - 2) = 2 > 0, \quad (6)$$

$$f(x_{i_a+1, n_1^a}^a) - f(x_{1,1}^{a+1}) = f(x_{i_a+1, n_2^a}^a) - (f(x_{i_a+1, n_2^a}^a) - 1) = 1 > 0. \quad (7)$$

$$\forall l \in \{1, 2, \dots, m-a\}$$

$$f(x_{i_{a+l}+1, n_2^{a+l}}^{a+l}) - f(x_{2,1}^{a+l+1}) = f(x_{i_{a+l}+1, n_2^{a+l}}^{a+l}) - (f(x_{i_{a+l}+1, n_2^{a+l}}^{a+l}) - 2) = 2 > 0, \quad (8)$$

$$f(x_{i_{a+l}, n_1^{a+l}}^{a+l}) - f(x_{1,1}^{a+l+1}) = f(x_{i_{a+l}, n_1^{a+l}}^{a+l}) - (f(x_{i_{a+l}, n_1^{a+l}}^{a+l}) - 1) = 1 > 0. \quad (9)$$

可知, $\bigcup_{j=1}^m G_{i_j}(n_1^j, n_2^j)$ 的顶点集的标号值是互不相同的, 且 $f(x_{1,1}^1) = 0$, $f(x_{2,1}^1) = M$. 所以, 由 (I) (I) 定义的 f 确实是 $V(T) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, M\}$ 的单射.

下面再来看由 (I) (I) 定义的 f 诱导的 f^* 是 $E(T) \rightarrow \{K, K+1, \dots, |E|+K-1=M\}$ 的一一映射.

由 (I) (I) 很易知, $\forall a (1 \leq a \leq m)$ 当且仅当 $e \in E(G_{i_a}(n_1^a, n_2^a))$ 时, $G_{i_a}(n_1^a, n_2^a)$ 的 $i_a \cdot n_1^a \cdot n_2^a$ 条边 e 的标号值充满整数段.

$$[f^*(x_{i_a, n_2^a}^a x_{i_a+1, n_1^a}^a), f^*(x_{2,1}^a x_{1,1}^a)] = [f(x_{i_a, n_2^a}^a) - f(x_{i_a+1, n_1^a}^a), f(x_{2,1}^a) - f(x_{1,1}^a)], \quad (1 \leq a \leq m),$$

或

$$[f^*(x_{i_a+1, n_2^a}^a x_{i_a, n_1^a}^a), f^*(x_{2,1}^a x_{1,1}^a)] = [f(x_{i_a+1, n_2^a}^a) - f(x_{i_a, n_1^a}^a), f(x_{2,1}^a) - f(x_{1,1}^a)]. \quad (a+1 \leq a \leq m).$$

由 (4) — (9) 很易得

$$f^*(x_{i_{a-1}, n_2^{a-1}}^{a-1} x_{i_{a-1}+1, n_1^{a-1}}^{a-1}) - 1 = f^*(x_{2,1}^a x_{1,1}^a), \quad (1 \leq a \leq m)$$

$$f^*(x_{i_a, n_2^a}^a x_{i_a+1, n_1^a}^a) - 1 = f^*(x_{2,1}^{a+1} x_{1,1}^{a+1}),$$

$$f^*(x_{i_a+1, n_2^a}^a x_{i_a, n_1^a}^a) - 1 = f^*(x_{2,1}^{a+1} x_{1,1}^{a+1}). \quad (a+1 \leq a \leq m)$$

所以, $\bigcup_{j=1}^m G_{i_j}(n_1^j, n_2^j)$ 的 $\sum_{j=1}^m i_j n_1^j n_2^j$ 条边的标号值充满整数段:

$$[f^*(x_{i_m, n_2^m}^m x_{i_m+1, n_1^m}^m), f^*(x_{2,1}^1 x_{1,1}^1)], \quad (a=m),$$

或:

$$[f^*(x_{i_m+1, n_2^m}^m x_{i_m, n_1^m}^m), f^*(x_{2,1}^1 x_{1,1}^1)], \quad (a < m),$$

且 $\forall e, e' \in E(\bigcup_{j=1}^m G_{i_j}(n_1^j, n_2^j)), e \neq e'$ 则 $f^*(e) \neq f^*(e')$.

最后再因

$$f^*(x_{2,1}^1, x_{1,1}^1) = f(x_{2,1}^1) - f(x_{1,1}^1) = M,$$

$$f^*(x_{i_m, a_1^m}^m, x_{i_m+1, a_1^m}^m) = f(x_{i_m, a_1^m}^m) - f(x_{i_m+1, a_1^m}^m)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(1)}{=} (M - \sum_{j=1}^{m-1} ((\frac{i_j}{2} - 1) n_1^j n_2^j + n_2^j + 1) - (\frac{i_m}{2} - 1) n_1^m n_2^m - n_2^m + 1) - (\sum_{j=1}^{m-1} ((\frac{i_j}{2} \\ & + 1) n_1^j n_2^j - n_2^j - 1) + (\frac{i_m}{2} + 1) n_1^m n_2^m - n_2^m) \\ & = (K + |E(\bigcup_{j=1}^m G_{i_j}(n_1^j, n_2^j))| - 1) - \sum_{j=1}^m i_j n_1^j n_2^j + 1 = K, \quad (\alpha = m) \end{aligned}$$

和

$$f^*(x_{i_m+1, a_1^m}^m, x_{i_m, a_1^m}^m) = f(x_{i_m+1, a_1^m}^m) - f(x_{i_m, a_1^m}^m)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(1)}{=} (M - \sum_{j=1}^a ((\frac{i_j}{2} - 1) n_1^j n_2^j + n_2^j + 1) - \sum_{j=1}^{m-a-1} ((\frac{i_{s+j}+1}{2} - 1) n_1^{s+j} n_2^{s+j} + n_2^{s+j} + 1) \\ & - (\frac{i_m+1}{2} - 1) n_1^m n_2^m - n_2^m + 1) \\ & - (\sum_{j=1}^a ((\frac{i_j}{2} - 1) n_1^j n_2^j - n_2^j - 1) + \sum_{j=1}^{m-a-1} ((\lceil \frac{i_{s+j}}{2} \rceil + 1) n_1^{s+j} n_2^{s+j} - n_2^{s+j} - 1) + \\ & (\lceil \frac{i_m}{2} \rceil + 1) n_1^m n_2^m - n_2^m) \\ & = (K + |E(\bigcup_{j=1}^m G_{i_j}(n_1^j, n_2^j))| - 1) - \sum_{j=1}^a i_j n_1^j n_2^j - \sum_{j=1}^{m-a} (\frac{i_{s+j}+1}{2} + \lceil \frac{i_{s+j}}{2} \rceil) n_1^{s+j} n_2^{s+j} + \\ & 1 = K. \end{aligned}$$

$$(\text{由 } \alpha+j (1 \leq j \leq m-\alpha) \text{ 为奇数} \Rightarrow \frac{i_{s+j}+1}{2} + \lceil \frac{i_{s+j}}{2} \rceil = i_{s+j},) \quad (0 \leq \alpha < m).$$

所以, f^* 确实是 $E(T) \longrightarrow \{K, K+1, \dots, M\}$ 的一一映射.

综上所述, (I) (I) 确实给出了 $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$ 的 K ——优美标号.

参 考 文 献

- [1] P. J. Slater, on K -graceful graphs. Proceedings of the 13th South Eastern Conference on combinatorics, Graph Theory and Computing. Utilitas Math. Pub. CO, winnipeg 1982: 53-57
- [2] M. Maheo and H. Thuillier, On α -graceful graphs. Ars Combinat. Vol. 13 (1982): 181-192.

The K -Gracefulness of $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$

Zhou Xuesong

ABSTRACT

In this paper, we prove that the graph $T((i_1, n_1^1, n_2^1), \dots, (i_m, n_1^m, n_2^m))$ which components being the pagoda-type graphs $G_{i_1}(n_1^1, n_2^1), G_{i_2}(n_1^2, n_2^2), \dots, G_{i_m}(n_1^m, n_2^m)$ is K -graceful.

Key word: Graph; Lbelings; Gracefulness