

两种近似计算的比较

黄世益

(基础课部)

摘 要

研究勒贝格求积公式和高斯求积公式,在中子注量场的分布计算中,其余项随结点数 n 和轴向距离 Z 的变化关系,并给出它们在实际计算时应注意的条件。

关键词:余项;结点数;中子注量场

0 引 言

自五十年代开始,国内外专家就开始研究辐射的生物效应,在农业科学研究中主要是辐射诱变、昆虫的辐射雄性不育、低剂量辐射等方面的研究。到六十年代初期曾取得不少可喜的成果,但由于对辐射场缺乏精确的了解,难以控制同样的辐射条件,给试验的重复性带来很大的不利因素。八十年代进入中子辐射效应的研究,仍存在同样的问题。作为辐射中心的工作人员应对辐射场的分布尽可能地通过仪器测试和理论计算做到定量的了解。对 γ 射线的辐射场,由于辐射源的线度大,工作范围广,辐射场的计算较简单^[1]。由于中子发生器本身的线度很小,仅约3cm左右,又是近源区域工作,这就给在近似计算时提出较高的精度要求。为此,我们对勒贝格和高斯求积公式的余项进行全面的分析研究是十分必要的。

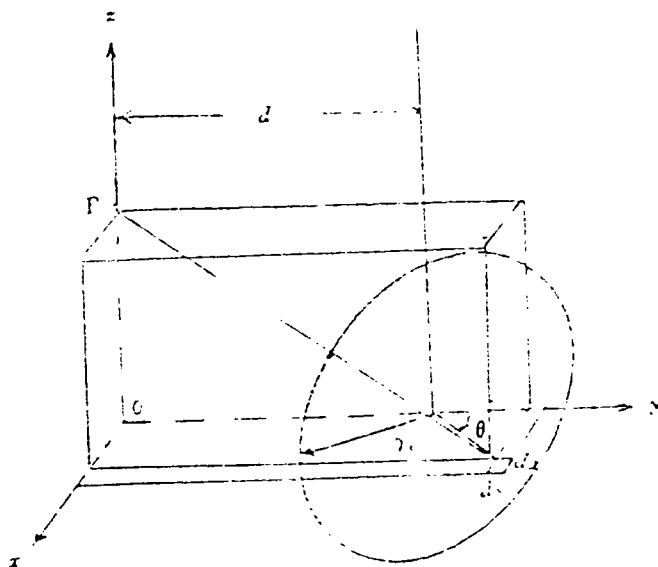
1 中子注量场的计算结果

在文献〔2〕中我们已导出如下结果:
横向注量分布(LFD)

$$\Phi(z, d) = \frac{N\gamma_0}{2\pi} \int_0^1 \left[\arctg \frac{\gamma_0 \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{z^2 + (d + \gamma_0\eta)^2}} \right] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2\eta^2}}, \quad (1)$$

其中 N 为中子数密度, $\eta = \cos\theta$, 其它量见图1。

本文于1993年12月25日收到



轴向注量分布 (AFD)

$$\Phi(z) = \frac{N\gamma_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\operatorname{arctg} \frac{\gamma_0 \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}} \right] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}}, \quad (2)$$

采用极坐标计算时直接得到

$$\Phi(z) = \frac{N}{4} \ln \left(\frac{z^2 + \gamma_0^2}{z^2} \right). \quad (3)$$

因采用不同的坐标系进行分别计算我们得到一个有用的积分关系公式：

$$\frac{N\gamma_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\operatorname{arctg} \frac{\gamma_0 \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}} \right] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}} = \frac{N}{4} \ln \left(\frac{z^2 + \gamma_0^2}{z^2} \right), \quad (4)$$

$$\text{或} \quad \int_{-1}^1 \left[\operatorname{arctg} \frac{\gamma_0 \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}} \right] \frac{d\eta}{\sqrt{z^2 + \gamma_0^2 \eta^2}} = \frac{\pi}{2\gamma_0} \ln \left(\frac{z^2 + \gamma_0^2}{z^2} \right). \quad (5)$$

该结果在数学上也有一定的实用价值，以后再讨论这个问题。

2 勒贝陶求积公式的余项分析

关于高斯求积公式的余项分析，我们在文献〔2〕中已有讨论。现在对勒贝陶求积公式的余项进行分析。

勒贝陶求积公式如下^{〔3〕}：

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \lambda_1^{(n)} f(-1) + \sum_{k=2}^{n-1} \lambda_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}) + \lambda_n^{(n)} f(1),$$

式中 $\xi_k^{(n)}$ 为勒让德多项式 $P'_{n-1}(x)$ 的根.

表 1 部分节点和求积系数表

n	求积节点 $\xi_k^{(n)}$	求积系数 $\lambda_k^{(n)}$
5	± 1	0.10000 000
	$\pm 0.65465 \quad 367$	0.54444 444
	0	0.71111 111
10	1	0.02222 22222
	$\pm 0.91953 \quad 39082$	0.13330 59908
	$\pm 0.73877 \quad 38651$	0.22488 93420
	$\pm 0.47792 \quad 49498$	0.29204 26836
	$\pm 0.16327 \quad 89577$	0.32753 97612

从数学的观点来分析,当结点数目固定后其余项应有确定的值,但在实际应用中,要精确地估算在各种情况下余项的大小是无法做到的;从表面分析,好象当节点数取定后,在同一问题中其余项也就基本确定了一个范围;但实际情况并不是这样.因此在近似计算的应用中必须对余项进行详细的分析,否则无法说明计算结果的精确度.本文借助于积分关系式(4)可以精确地估计出勒贝陶求积公式中的余项和结点数之间的关系.

依据文献[3]中的数据,我们计算了 $\Phi(0.5)$ 和结点数 n 之间的近似值与真实值之间的百分误差(余项占真实值的百分率).我们将勒贝陶和高斯求积公式的计算结果列成表2,以便对照比较.

表 2 $\Phi(0.5)$ 的余项 $R_n(f)$ 与 n 的关系

结点数 n	真实值	近似值		$R_n(f)/\text{真实值}(\%)$	
		勒贝陶	高斯	勒贝陶	高斯
2			0.42307		-26.500
3		0.79517	0.66505	+38.100	+15.500
4		0.48184	0.54086	-16.300	-6.040
5		0.61274	0.59436	+6.440	+3.250
6	0.575646273	0.55444	0.56766	-3.680	-1.390
7		0.58303	0.58016	+1.280	+0.784
8		0.57027	0.57382	-0.934	-0.317
9		0.57701	0.57678	+0.237	+0.197
10		0.57409	0.57526	-0.270	-0.070

从上表看出：

- (1) 结点数 n 取偶数时，其近似值较真实值为小； n 取奇数时，其近似值较真实值为大。
- (2) 高斯求积公式的计算结果比勒贝陶求积公式的收敛速度快些；勒贝陶公式的余项偏差百分率较高斯公式的大些。
- (3) 在轴向距离 $Z=0.5\text{cm}$ 的特定条件下，若计算的偏差为百分之一时，则对高斯公式要求 $n>7$ ，而对勒贝陶公式要求 $n>8$ 。

为了讨论整个注量场的分布，我们必须讨论余项随轴向距离的变化关系，以便确定注量的分布在一定精确度的要求下所需选取的结点数或分区域分别进行计算。为此，我们分别计算了有代表性的 $R_{10}(f)$ 、 $R_5(f)$ 随 Z 的变化关系。计算结果如表 3。

表 3(a) $\Phi(Z)$ 的余项 $R_5(f)$ 与 Z 的关系 $n=5$

$Z(\text{cm})$	真实值	近似值		$R_5(f)/\text{真实值}(\%)$	
		勒贝陶	高斯	勒贝陶	高斯
0.2	1.01186	1.44053	1.21487	+42.36	+20.10
0.4	0.67805	0.75683	0.65546	+11.62	+3.33
0.5	0.57565	0.61274	0.59436	+6.44	+3.25
0.6	0.49525	0.51253	0.44654	+3.49	-9.84
1.0	0.29466	0.29301	0.25212	-0.56	-14.44
1.5	0.17329	0.17063	0.14412	-1.53	-16.83
2.0	0.11157	0.10826	0.09143	-2.97	-18.05

表 3(b) $\Phi(Z)$ 的余项 $R_{10}(f)$ 与 Z 的关系 $n=10$

$Z(\text{cm})$	真实值	近似值		$R_{10}(f)/\text{真实值}(\%)$	
		勒贝陶	高斯	勒贝陶	高斯
0.2	1.01186	0.95308	0.96950	-5.810	-4.180
0.4	0.67805	0.67372	0.67609	-0.639	-0.290
0.5	0.57565	0.57409	0.57526	-0.270	-0.070
0.6	0.49525	0.49445	0.49522	-0.162	-0.006
1.0	0.29466	0.29425	0.29474	-0.139	+0.027
1.5	0.17329	0.17299	0.17334	-0.173	+0.029
2.0	0.11157	0.11136	0.11161	-0.188	+0.036

结果分析

(1) 从 $\Phi(Z)$ 的余项的偏差百分率随轴向距离的变化关系初步看出，它们均存在一个极小值，勒贝陶公式出现在 $Z=1.0\text{cm}$ 附近，而高斯公式出现在 $Z=0.5\text{cm}$ 附近。它们的各自变化趋势相似，但两种公式的变化趋势不全相同，通过 $R_5(f)$ 的偏差百分率随 Z 的变化曲线

明显看出, 勒贝陶公式的余项的偏差百分率在经过极小值后, 它随 Z 的增加上升缓慢且平坦,

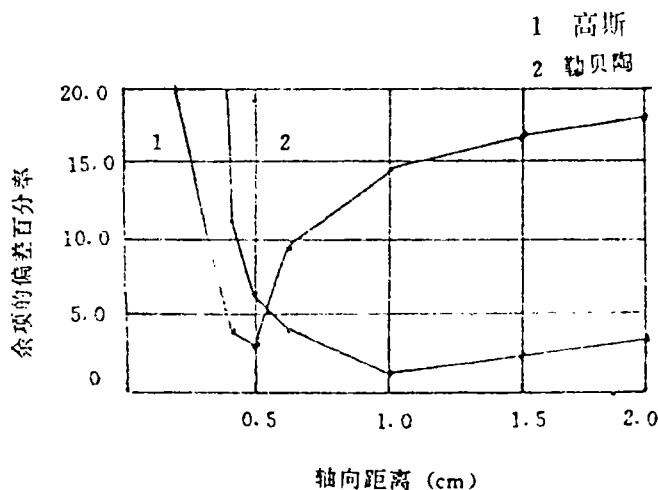


图 2 $\Phi(Z)$ 的余项 $R_5(f)$ 与轴向距离的关系曲线

而高斯公式的余项的偏差百分度成较快上升趋势。

(2) 当 $Z > 0.5\text{cm}$ 以后, 两种计算公式的余项 $R_{10}(f)$ 的偏差百分率均低于千分之三, 均可用来计算中子注量场的分布, 但若结点数低于 10 时, 两种计算结果还是会有较大的差异, 参看图 2。

3 两种近似计算的比较

本文通过积分关系式 (4) 实现了对高斯型求积公式的两种近似计算的余项大小的定量比较, 这在理论和实用上都是很有价值的, 而且是可操作的。我们认为这种分析方法带有一定的普遍性, 即在计算任何高斯型积分时, 在被计算的场内总可能存在某些特殊点, 它们的高斯型积分是可积的, 从而为直接求余项的大小提供了依据。

在结点数 n 取 10 计算时, 在计算中子注量场的分布时, 这两种方法均可使用。

在结点数 $5 < n < 8$ 计算时, 在计算中子注量场的分布时, 勒贝陶求积公式余项随轴向距离的偏差百分率较小。

在整个注量场的计算中, 必须注意余项的偏差百分率与被积函数、结点数、空间点的位置有其复杂的关系, 这些复杂关系必须通过具体的计算分析, 才能对整个场的分布有一个全面的正确的了解。

参 考 文 献

- [1] 徐永高, 黄世益. 农业研究中 $\text{CO}^{60}\gamma$ 射线照射方法的初步研究. 原子能科学技术, 1964, (8): 967~972
- [2] 黄世益. 中子注量场的分布. 华东交通大学学报, 1994, 11 (2): 1~4
- [3] 教学手册. 北京: 人民教育出版社, 1979. 296~297

The Comparision of Two Formulas in Approximate Calculation

Huang Shiyi

ABSTRACT

This article discusses mainly the Gauss—integration formula and Lobatto—integration formula which are used in the calculation of neutron—flux field distribution, and the changeable relations of the two formulas' remainders with nodal point numbers n and axial distance. The calculated conditions of the two formulas are also given in the paper.

Key words: Remainder; Nodal point number; Neutron—flux field