图 B（n，2，2）的优美性*

周尚超

（基础课部）

摘　要

证明了图 B（n，2，2）优美的充分必要条件是 $n\leqslant5$.

关键词：图；完全图；优美图

1　引言和主要结果

本文引用文献［1］中的记号和术语. 图 B（n，r，m）是有一个公共 K_r（r 阶完全图）的 m 个 K_n 组成的图，其中 $n>r$，$m>1$. 由文献［2］知，对于图 B（n，2，m），目前仅有的结果是 B（3，2，m）和 B（4，2，m）是优美的. 图1中给出了几个优美图及其标号.

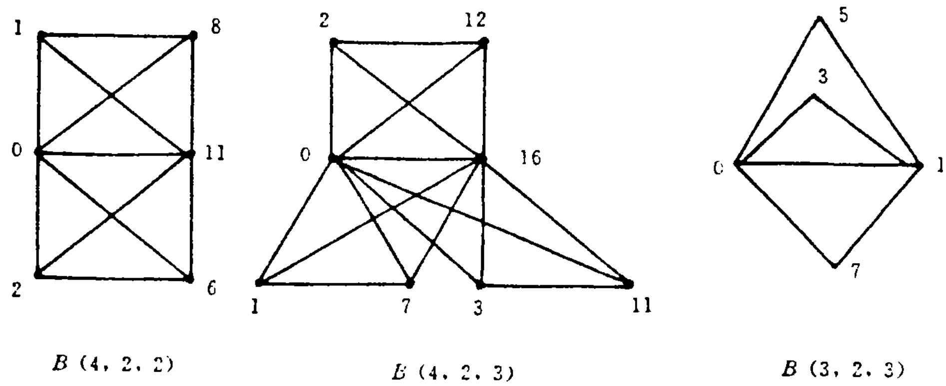

图1　几个优美图

本文主要证明了下列定理.

定理　图 B（n，2，2）是优美图的充分必要条件是 $n\leqslant5$.

本文于1994年6月20日收到

*　江西省自然科学基金资助课题

2 定理的证明

为叙述简便，我们将点的标号与点等同看待，将线的标号与线等同看待，例如，最大线（边）表示标号最大的线.

设 $G=B(n, 2, 2)$，G 的线的数目 $q=n^2-n-1$.

引理 1 设 $G=B(n, 2, 2)$ 是优美图，则 $n\leqslant 7$.

证明 设 G_1 与 G_2 是 G 的两个同构于 K_n 的子图，并设 G 的优美标号中，最大线属于 G_1. 设 G_1 的标号是 $0=l_1<l_2<\cdots<l_n=q$. 令 $k_1=l_2-l_1$，$k_2=l_3-l_2$，…，$k_{n-1}=l_n-l_1$. 则 k_j ($j=1$，…，$n-1$) 是 G_1 的线标号，且

$$K_1+K_2+\cdots+K_{n-1}=q. \tag{1}$$

令 $K_{12}=K_1+K_2$，$K_{23}=K_2+K_3$，…，$K_{n-2,n-1}=K_{n-2}+K_{n-1}$，则 K_{ij} 是 G_1 的线的标号 ($j=i+1$) 且 ($n-1=0 \pmod 2$)

$$K_{12}+K_{34}+\cdots+K_{n-2,n-1}=q, \tag{2}$$

$$K_{23}+K_{45}+\cdots+K_{n-3,n-2}=q-K_1-K_{n-1}. \tag{3}$$

或 ($n-1=1 \pmod 2$)

$$K_{12}+K_{34}+\cdots+K_{n-3,n-2}=q-K_{n-1}, \tag{2a}$$

$$K_{23}+K_{45}+\cdots+K_{n-2,n-1}=q-K_1. \tag{3a}$$

(1) 式左端是 G_1 的 $n-1$ 条线之和. (2)，(3)（或 (2a)，(3a)）是 G_1 的共 $n-2$ 条线之和. (1)，(2)，(3) 左端（或 (1)，(2a)，(3a)）左端）共有 $2n-3$ 条线. 我们用 $(2n-3)L_1$ 表示 G_1 的这 $(2n-3)$ 条线之和，则

$$(2n-3)L_1=3q-K_1-K_{n-1}. \tag{4}$$

设 G_2 的最大线标号是 M ($\leqslant q$)，G_2 的点标号是 $\bar{l}_1<\bar{l}_2<\cdots<\bar{l}_n$. 对于 G_2，也有类似的 (1)，(2)，(3)，(2a)，(3a) 式，只是将其中的 q 改为 M，K 改为 $\overline{K}$. (4) 式则为

$$(2n-3)L_2=3M-\overline{K}_1-\overline{K}_{n-1}. \tag{4a}$$

将 (4) 和 (4a) 相加，则左边是 G 的 $4n-6$ 条线之和，记为

$$(4n-6)L=3q+3M-(K_1+K_{n-1}+\overline{K}_1+\overline{K}_{n-1}). \tag{5}$$

$(4n-6)L$ 是 $4n-6$ 个正整数之和. G_1 与 G_2 有一条公共边，设公共边的标号是 l_0，则 $(4n-6)L$ 是 $4n-7$ 个不同的正整数之和再加 l_0. $4n-7$ 个不同的正整数之和 $\geqslant 1+2+3+\cdots+4n-7=(2n-3)(4n-7)$. 由此得

$$(2n-3)(4n-7)+l_0\leqslant(4n-6)L. \tag{6}$$

K_1，K_{n-1}，$\overline{K}_1$，$\overline{K}_{n-1}$ 是 G 的 4 条线，其中至多两个相等，设 K 是这 4 个数之和也用 K 表示这 4 个数的集合. 则 $K\geqslant 1+1+2+3=7$.

$$3q+3M-K\leqslant 6(n^2-n-1)-7=6n^2-6n-13. \tag{7}$$

由 (6) 和 (7) 得

$$8n^2-26n+21+l_0\leqslant 6n^2-6n-13,$$

即

$$2n^2-20n+34+l_0\leqslant 0. \tag{8}$$

由 (8) 式得 $n \leqslant 7$.

引理 2 设 $G=B(7, 2, 2)$，则 G 不是优美图.

证明 当 $n=7$ 时，(5) 式为

$$22L = 3q + 3M - K. \tag{9}$$

设 $K_{123}=K_1+K_2+K_3$，$K_{456}=K_4+K_5+K_6$，$\overline{K}_{123}=\overline{K}_1+\overline{K}_2+\overline{K}_3$，$\overline{K}_{456}=\overline{K}_4+\overline{K}_5+\overline{K}_6$，$K_{123}+K_{456}=q$，$\overline{K}_{123}+\overline{K}_{456}=M$，这两式和 (9) 式相加得

$$26L = 4q + 4M - K \leqslant 8q - 7 = 321.$$

但 $26L$ 是 25 个不同的正整数之和 ($\geqslant 325$) 加 l_0，矛盾. 因此 G 不是优美图.

引理 3 设 $B(n, 2, 2)$ 是优美图，且 $M=q$，则 $n \leqslant 4$.

证明 当 $M=q$ 时，即公共线 $l_0=q$. (5) 式左端是 $4n-6$ 个不同的正整数之和，$K \geqslant 1+2+3+4=10$. 由 (5) 式得：$(2n-3)(4n-5) \leqslant 6q-10$，即

$$8n^2 - 22n + 15 \leqslant 6n^2 - 6n - 16, 2n^2 - 16n + 31 \leqslant 0, n \leqslant 4.$$

引理 4 设 $G=B(6, 2, 2)$ 是优美图，则

(a) $M=25$，$l_0=1$；

(b) $M=27$，$l_0=1, 3, 5$；

(c) $M=28$，$l_0=3, 5, 7$.

证明 由引理 3，知 $M<q=29$. 由 (5) 式得

$$18L = 3q + 3M - K,$$

即

$$17L + l_0 = 87 + 3M - K. \tag{10}$$

由于 17 个不同正整数之和 $\geqslant 9 \times 17 = 153$，$K \geqslant 7$. 所以 $M \geqslant 25$. 设 $M=25$，则 $l_0 \leqslant 87+75-7-153=2$. 设 $l_0 \geqslant 4$，则 $K \geqslant 1+2+3+4=10$. 由 (10) 得，当 $M=27$ 时，$l_0 \leqslant 5$，$M=28$，$l_0 \leqslant 8$. 由于 G_1 (或 G_2) 是 K_6，设它的点的标号中有 D 个奇数 F 个偶数，G_1 的边的标号中有 $D \cdot F$ 个奇数，因此 G_1 的奇数标号的边数是 0，5，8，9 四种. G 有 29 条边，有 15 条边的标号是奇数. 因此，G_1 (G_2) 有 8 条边的标号是奇数，而公共边 l_0 的标号必为奇数. 设 $M=28$，$l_0=1$. 如果 29 不是公共点的标号，则 0 必为公共点的标号，否则 G_2 的线标号不会是 28. 此时，另一个公共点的标号为 1. 由于 29 是 G_1 的点的标号，$29-1=28$ 是 G_1 的边的标号，矛盾. 所以当 $M=28$ 时，$l_0 \neq 1$.

最后证明 $M \neq 26$. 如果 29，28，27 是 G_1 的线的标号，则 G_1 必有 4 个点的标号为 0，29，1，27 或 0，29，28，2. 即，如 29，28，27 是 G_1 的线标号，则 26 也是 G_1 的线标号.

引理 5 设 $G=B(6, 2, 2)$ 是优美图，则 $M>25$.

证明 设 $M=25$. 即 G_1 有标号为 29，28，27，26 的线. 则 G_1 必有 4 个点的标号为 0，29，1，27 或 0，29，28，2. 如果是后者，则我们把每个点的标号 l_i 改为 $29-l_i$，这样就得到前者 0，29，1，27. 由 (10) 式，得 $K=7$ 或 8，或 $K=\{1, 1, 2, 3\}$ 或 $\{1, 1, 2, 4\}$. 由 0，29，1，27 是 G_1 的标号，得 $K_1=1$，$K_5=2$，因此，$\overline{K_1}=1$，$\overline{K}_5=3$ 或 4，G 的标号如图 2. 这时已有了标号为 29，28，27，26，25，24 的线. 如果 $23 \in \{l_3, l_4, \bar{l}_3, \bar{l}_4\}$，则会有两条线标号相同. 如果 $2 \in \{\bar{l}_3, \bar{l}_4\}$，则有两条线标号为 2. 如果 $6 \in \{l_3, l_4\}$，则 $27-6=21=l_5-l_3=K_{34}$. 但由 (10) 知在 17 条线中最大的线为 17 或 18，不可. 这说明 $M>25$.

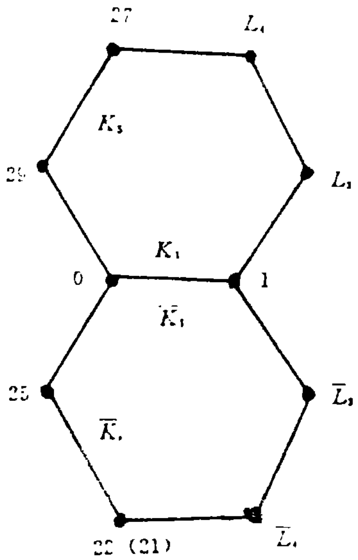

图 2

若 G 是优美图，l_i 是 G 的点的优美标号. 若将每个点的标号 l_i 改为 $q-l_i$，则也是一个优美标号. 我们称这两种标号是等价的.

引理 6 设 $G=B(6, 2, 2)$ 是优美图，则 $M>27$.

证明 设 $M=27$，由引理 4，知 $l_0=1$，3，5.

情形 (1) $l_0=1$

由于 28，29 是 G_1 的线标号，因此，0，1，29（或与之等价的 0，28，29）是 G_1 的点的标号，即 $l_1=0$，$l_2=1$，$l_6=29$，$K_1=1$. 由 (10) 式，$K\leqslant 14$. G_2 的最大线是 27，即 $\bar{l}_6=27$. 0，1 是公共点的标号. 现已有标号为 29，28，27，26 的线. 因此，$l_5\leqslant 25$，$\bar{l}_5\leqslant 25$. 要得到标号为 25 的线，只有下列 4 种

(1.1) $\bar{l}_5=25$；(1.2) $l_5=25$；(1.3) $\bar{l}_3=2$；(1.4) $l_3=4$. $\bar{l}_3=2$ 是不可能的.

(1.1) $\bar{l}_5=25$

要得到标号为 23 的线，只有 $\bar{l}_3=4$，$l_3=6$，$l_5=23$ 三种. 如果 $\bar{l}_3=4$，则标号为 2，3，4 的线都在 G_2 中. 由 (1) 式 $K_1+K_2+K_3+K_4+K_5=29$，这 5 个 K_i 的集合 $K(5)=\{1, 5, 6, 7, 10\}$ 或 $\{1, 5, 6, 8, 9\}$，如果 $K_5=7$，则 $K_1+K_5+\overline{K}_1+\overline{K}_5=1+7+1+2=11$，由 (10) 式，在 17 条线中最大线为 20，但 $\overline{K}_{34}=\bar{l}_5-\bar{l}_3=25-4=21$. 因此 $K_5=5$ 或 6，即 $l_5=23$ 或 24，这又得到了标号为 23 的线. 所以 $\bar{l}_3\neq 4$. 如果 $l_3=6$，为得到标号为 22 的线，只有 $l_5=22$. 要得到标号为 20 的线，只有 $l_4=9$，但这时 G_1 的点的标号是 0，1，6，9，22，29 三个奇数和三个偶数，不可. 所以，$l_3\neq 6$. 如果 $l_5=23$，为得标号为 21 的线，只有 $l_3=8$. 为得标号为 20 的线，只有 $\bar{l}_3=5$，这样会有 $27-5=22$，有两条线标号为 22，不可. $\bar{l}_5=25$ 不可能.

(1.2) $l_5=25$

这时 $K_5=4$，$\bar{l}_5\leqslant 22$，$\overline{K}_5\geqslant 5$，$K\geqslant 1+1+4+5=11$，由 (10) 式知 17 条线中最大者为 20，$l_4\leqslant 21$，$\bar{l}_4\leqslant 21$. 要得到标号为 23 的线，只有 $l_3=6$ 或 $\bar{l}_3=4$. 如果 $l_3=6$，要得标号为 22 的线，只有 $\bar{l}_5=22$. 但这时有两条标号为 5 的线. 如果 $\bar{l}_3=4$，则有两条标号为 4 的线. $l_5=25$ 不可能.

(1.4) $l_3=4$

要得标号为 24 的线，只有 $l_5=24$. 再要得到标号为 22 的线，就会有两条线相等.

$l_0=1$ 是不可能的.

情形 (2) $l_0=3$

由 $l_0=3$，得 $K=K_1+K_5+\overline{K}_1+\overline{K}_5\geqslant 1+2+3+3=9$. 由 (10) 式 $17L=165-K\leqslant 156$，$K\leqslant 12$. 由于 G_2 的点最大是 28，且 0，1 是 G_1 的点的标号. 所以，0，1 中必有一个点是公共点，这样 G_1 才有标号为 27 的线. 公共点只有 0，3 和 1，4 两种. 如果公共点是 0，3，则 1，

2，3 都是 G_1 的线标号．G_2 的线标号 $\overline{K}_1$，$\overline{K}_2$，$\overline{K}_3$，$\overline{K}_4$，$\overline{K}_5$ 这 5 个数的和与集合都用 $\overline{K}$ (5) 表示，则 $\overline{K}$ (5) $=27$，$\overline{K}$ (5) $=$ {3，4，5，6，9} 或 {3，4，5，7，8}．K_5 不能与这些数中的某个相等，$K_5 \geqslant 6$，$l_5 \leqslant 23$．G 不会有标号为 25 的线．如果公共点是 1，4，则 G_2 的最大点标号是 28．这样，不会得到标号为 26 的线．

$l_0=3$ 不可能．

情形 (3)　$l_0=5$

由 (10) 式，$K=K_1+K_5+\overline{K}_1+\overline{K}_5=1+2+3+4$，两个公共点只能是 0，5 和 1，6 两种．如果是 0，5，则有 $l_1=0$，$l_2=1$，$l_3=5$，$l_6=29$．即 $K_1=1$，$K_2=4$，则 $K_5 \neq 4$，$\overline{K}_1$ 和 $\overline{K}_5$ 都不为 4，矛盾．如果公共点是 1，6，则 0，1，6，29 是 G_1 的点标号，$K_1=1$．$\overline{K}_1 \in$ {2，3，4}，$\overline{l}_1=1$，$\overline{l}_2-\overline{l}_1=\overline{K}_1$，$\overline{l}_2 \in$ {3，4，5}，$\overline{l}_3=6$，$\overline{K}_2=\overline{l}_3-\overline{l}_2 \in$ {1，2，3}．但是，只有 K_1，K_5，$\overline{K}_1$，$\overline{K}_5$ 能在 {1，2，3} 中，矛盾．

这就证明了 $M=27$ 是不可能的．

引理 7　设 $G=B$ (6，2，2)，则 G 不是优美图．

证明　由前几个引理，如 G 是优美图，则 $M=28$，$l_0=3$，5，7．

情形 (1)　$l_0=7$

由 (10) 式，知 $K=K_1+K_5+\overline{K}_1+\overline{K}_5=1+2+3+4$ 或 $=1+2+3+5$．0，7，29 是 G_1 的点标号，0，7，28 是 G_2 的点标号，公共点是 0，7．即 $l_1=\overline{l}_1=0$，由 K_1，$\overline{K}_1 \leqslant 5$，得 l_2，$\overline{l}_2 \leqslant 5$．如果 $K=$ {1，2，3，4}，则 l_2 只能取 2，这时，$\overline{l}_2$ 若取 1，则有两条 27 线，若取 $\geqslant 3$，则 $K_2 \leqslant 4 \in K$．如果 $K=$ {1，2，3，5}，则 $l_2=3$，$\overline{l}_2=1$，$K_1=3$，$\overline{K}_1=1$，K_5，$\overline{K}_5 \in$ {2，5}．如果 $K_5=2$，则 $L_5=27$，有两条 27 线．如果 $K_5=5$，则 $\overline{K}_5=2$，$\overline{l}_5=26$，有两条 26 线．$l_0=7$ 是不可能的．

情形 (2)　$l_0=5$

这时，$K=K_1+K_5+\overline{K}_1+\overline{K}_5 \geqslant 1+2+3+4=10$．由 (10) 式，$K \leqslant 13$．$K=$ {1，2，3，4}，{1，2，3，5}，{1，2，3，6} 或 {1，2，3，7}，{1，2，4，5}，{1，2，4，6} 或 {1，2，5，5}．0，5，29 是 G_1 的标号，0，5，28 是 G_2 的标号．若 $K=$ {1，2，3，4}，则 $K_1 \leqslant 4$，$\overline{K}_1 \leqslant 4$．因此，$l_2 \leqslant 4$，$\overline{l}_2 \leqslant 4$．由于 $l_1=0$，$l_3=\overline{l}_3=5$，这是不可能的．同理，$K=$ {1，2，3，6}，{1，2，3，7}，{1，2，4，6} 都是不可能的．设 $K=$ {1，2，3，5}，则 $K_1 \leqslant 3$ 或 $\overline{K}_1 \leqslant 3$．设 $K_1 \leqslant 3$，则 $K_1=1$，G_1 有标号为 28 的线，矛盾．设 $\overline{K}_1 \leqslant 3$，则 $\overline{K}_1=1$．0，1，5，28 是 G_2 的点标号，{K_5，$\overline{K}_5$} $=$ {2，3}，$K_5=2$，$\overline{K}_5=3$，即 25 是 G_2 的点标号，27 是 G_1 的点标号，这就有两条边标号为 27，不可．设 $K=$ {1，2，4，5}，则 $K_1=2$ 或 $\overline{K}_1=2$．若 $K_1=2$，则 $\overline{K}_1=5$，{K_5，$\overline{K}_5$} $=$ {1，4}，$K_5=4$，$\overline{K}_5=1$．0，2，5，25，29 是 G_1 的点标号，0，5，27，28 是 G_2 的点标号，有两条边标号为 27．若 $\overline{K}_1=2$，则 $K_1=5$，$K_5=4$，$\overline{K}_5=1$．0，5，25，29 是 G_1 的点标号，0，2，5，27，28 是 G_2 的点标号，有两条边是 25．设 $K=$ {1，2，5，5}，则 $K_1=\overline{K}_1=5$，$K_5=2$，$\overline{K}_5=1$．0，5，27，29 是 G_1 的点标号，0，5，27，28 是 G_2 的点标号，不可．$l_0=5$ 不可能．

情形 (3)　$l_0=3$

这时，3+3+1+2$\leqslant K \leqslant$15. $K_1=\overline{K}_1=3$，$K_5+\overline{K}_5\leqslant 9$. 由 $l_6=29$，$\bar{l}_6=28$，得 $K_5\neq 1$，4；$\overline{K}_5\neq 2$.（K_5，$\overline{K}_5$）共有以下情形：（2，1），（2，4），（2，5），（2，6），（2，7），（5，1），（5，4），（6，1）. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（2，1），则 $l_5=27$，$\bar{l}_5=27$，不可. 同理（K_5，$\overline{K}_5$）=（5，4）也不可. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（2，4），则 $l_5=27$，$\bar{l}_5=24$，有两条边长 23，不可. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（2，5），则 G_1 的点标号有 0，3，27，29；G_2 的点标号有 0，3，23，28. 要得到标号为 22 的线，必有 22 是 G_2 的点标号. 要得到标号为 21 的线，必得两条相同的线. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（2，6），则 G_1 的点标号有 0，3，27，29；G_2 的点标号有 0，3，22，28；要得标号为 23 的线，必有 23 是 G_2 的点标号，要得到标号为 21 的线，必得两条相同的线. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（2，7），则 G_1 和 G_2 的点的标号分别有 0，3，27，29 和 0，3，21，28. 要得标号为 23 的线，必有 23 是 G_1 的点标号. 要得标号为 22 的线，必得两条相同的线. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（5，1），则 G 有两条线为 24. 设（K_5，$\overline{K}_5$）=（6，1），则 G_1 和 G_2 的点的标号分别有 0，3，23，29 和 0，3，27，28. 要得边长为 22 的线，只有 7 是 G_1 的点标号或 5 是 G_2 的点标号. 若 7 是 G_1 的点标号，要得标号为 21 的线，必有 21 是 G_1 的点标号，这时 G_1 的点标号为 0，3，7，21，23，29；G_2 的点为 0，3，27，28，要得边长为 19 的线，就会得到两条相同的线. 若 5 是 G_2 的点标号，则 G 有两条标号为 23 的线. $l_0=3$ 不可能. 因此，G 不是优美图.

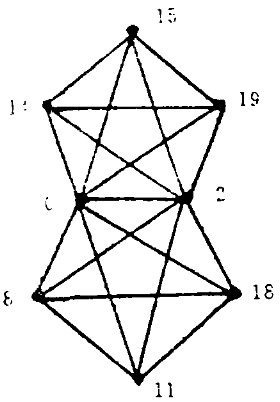

图 3

最后，我们给出 B（5，2，2）的优美标号（图 3），这就完成了定理的证明.

参 考 文 献

[1] Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley. Reading, MA, 1969
[2] 柳柏濂. 关于优美图的最近结果. 应用数学，1990，(4)

B（n，2，2）is Graceful for $n\leqslant 5$

Zhou Shangchao

ABSTRACT

Let K_n denote the complete graph on n vertices. Let $B(n, r, m)$ be the graph consisting of m copies of K_n with a K_r in common. We proved B（n，2，2）'is gracedful for $n\leqslant 5$.

Key words: Graph; Complete graph; Graceful graph