

关于正则图的独立数的一点注记*

徐保根

(基础课部)

摘 要

给出 n 阶 k -正则图独立数的界限, 并着重讨论了其界的可达性问题.

关键词: 正则图; 独立数; 独立集

0 引言

本文所指的图均为无向单图. $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的点集和边集. 对于 $S \subseteq V(G)$, 若 S 在 G 中的导出子图无边, 则称 S 为 G 的一个独立集. 点数最多的独立集称为最大独立集, 最大独立集中的点数称为独立数 (或点无关数). 并记之为 $\beta_0(G)$.

若 G_1 和 G_2 分别表示两个无公共点的图, 本文用 $G_1 + G_2$ 表示其联和, 定义为

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2),$$

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\},$$

上述未说明的符号、术语同于文献 [1].

1 主要结论

定理 1 若 G 为 n 阶 k -正则图, ($k \geq 1$),

则: $\left\{ \frac{n}{k+1} \right\} \leq \beta_0(G) \leq \min \{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

其中 $\{x\}$ 和 $\lfloor x \rfloor$ 分别表示不小于 x 的最小整数和不大于 x 的最大整数.

定理 2 对任意自然数 n 和 k , 若 $n > k$, 且 nk 为偶数, 则存在 n 阶 k -正则图 G , 使得 $\beta_0(G) = \min \{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

定理 3 设 $n = s(k+1) + t$, $m = k+1+t$, 其中 s, k, t 均为整数, 且 $s \geq 1, 0 \leq t \leq k$; 若 m 为偶数, 则存在 n 阶 k -正则图 G , 使得

$$\beta_0(G) = \left\{ \frac{n}{k+1} \right\}.$$

本文于 1993 年 6 月 11 日收到

* 江西省自然科学基金资助课题

定理 4 若 G 为 $4t+1$ 阶 $2t$ 度正则图, $(t \geq 2)$, 则 $\beta_0(G) \geq 3$.

推论 不包含三角形的正则自补图只有 K_1 和 C_5 .

定理 5 当且仅当 $n \geq 7$ 时, 存在 n 阶非空正则图 G , 使得图 G 具有唯一的最大独立集.

2 定理的证明

定理 1 的证明:

下界 $\beta_0(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ 参见文献[2]即得.

上界中 $\beta_0(G) \leq n-k$ 是显然的.

只证 $\beta_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 即可. 事实上, 由于 $k \geq 1$, 设 S 为 G 的一个最大独立集, $\beta_0(G) = |S|$. S 中各点的度数之和为 $k \cdot |S|$, S 中任意一点的邻点均在 $V(G) \setminus S$ 中, 故 $k|S| \leq (n - |S|) \cdot k$. 从而有

$\beta_0(G) = |S| \leq \frac{n}{2}$, 由于 $\beta_0(G)$ 为整数, $\beta_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. $\beta_0(G) \leq \min\{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$. 证毕.

定理 2 的证明:

(1) 当 n 为偶数时; ($k \geq 1$)

(a) 若 $k \leq \frac{n}{2}$; 令 G 为 n 阶 k -正则二部图. 图 G 的存在性是显然的. 故 $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$, 由定理 1 得: $\beta_0(G) = \frac{n}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \min\{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

(b) 若 $k > \frac{n}{2}$; 令 H 为 k 阶 $2k-n$ 度正则图. 由于 $n > k, k > 2k-n, n$ 为偶数, 故 H 是存在的. 取 $G \cong \overline{K_{n-k}} + H$. 显然 G 为 n 阶 k -正则图, $\beta_0(G) \geq n-k$, 由定理 1 得 $\beta_0(G) = n-k$. 即 $\beta_0(G) = n-k = \min\{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

(2) 当 n 为奇数时; (此时 k 为偶数)

(a) 若 $k \leq \frac{n-1}{2}$; 令 G_1 为 $n-1$ 阶 k -正则二部图, 显然 G_1 是存在的. 由文献[3]: k -正则 ($k > 0$) 二部图必有完美边无关集. 故 G_1 中有 $\frac{k}{2}$ 条独立边, 将 G_1 去掉这 $\frac{k}{2}$ 条独立边 (k 为偶数), 增加一个顶点 v , 并将 v 点同上述 $\frac{k}{2}$ 条独立边的端点邻接, 这样得到一个 n 阶 k -正则图 G , 显然有 $\beta_0(G) \geq \frac{n-1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, 由定理 1 给出的上界得 $\beta_0(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \min\{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$.

(b) 若 $k > \frac{n-1}{2}$;

由于 k 为偶数, $n > k$, 即此时 $k > 2k-n$, 故存在 k 阶 $2k-n$ 度正则图 H . 令 $G \cong \overline{K_{n-k}} + H$, G 为 n 阶 k -正则图, 显然, $\beta_0(G) \geq n-k$. 由定理 1 给出的上界得: $\beta_0(G) = n-k$, 即 (n 为奇数), $\beta_0(G) = n-k = \min\{n-k, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明:

由于 $n = S(k+1) + t = (S-1)(k+1) + m$, ($S \geq 1$), 而且 m 为偶数, 故 n 和 k 不同

为奇数. 考虑到 $m=1+k+t>2t$, 故存在 m 阶 t -正则二部图 H ; 显然 $\overline{H}$ 为 m 阶 k -正则图. 且当 $t=0$ 时, $\overline{H}$ 为完全图; 当 $t\geq 1$ 时, $\beta_0(\overline{H})=2$. 即有

$$\beta_0(\overline{H}) = \begin{cases} 1 & t=0, \\ 2 & t\geq 1. \end{cases}$$

$$\text{可见: } \beta_0(\overline{H}) = \left\{ \frac{m}{k+1} \right\}$$

令: $G_1 = (S-1)K_{k+1}$ 表示 $S-1$ 个 $k+1$ 阶完全图的并; 取 $G = G_1 \cup \overline{H}$; 显然, 图 G 为 n 阶 k -正则图, 且 $\beta_0(G) = \beta_0(G_1) + \beta_0(\overline{H}) = S-1 + \left\{ \frac{m}{k+1} \right\} = \left\{ \frac{(S-1)(k+1)+m}{k+1} \right\} = \left\{ \frac{n}{k+1} \right\}$.

定理 3 证毕.

定理 4 的证明:

(反证)若存在 $4t+1$ 阶 $2t$ 度正则图 G , ($t\geq 2$), 使得 $\beta_0(G)\leq 2$. 显然只有 $\beta_0(G)=2$.

设 $S = \{u_1, u_2\}$ 为 G 的一个最大独立集, 记 $N(x)$ 表示 x 点在 G 中的邻域. $N(u_1) \cup N(u_2) = V \setminus S$; $|V(G) \setminus S| = |N(u_1) \cup N(u_2)| = |N(u_1)| + |N(u_2)| - |N(u_1) \cap N(u_2)|$
即: $(4t+1)-2 = 2t+2t - |N(u_1) \cap N(u_2)|$, 从而有 $|N(u_1) \cap N(u_2)| = 1$; 记 $N(u_1) \cap N(u_2) = \{u_0\}$.

$$N(u_1) = \{u_0, v_1, v_2, \dots, v_{2t-1}\};$$

$$N(u_2) = \{u_0, v'_1, v'_2, \dots, v'_{2t-1}\};$$

$$S_1 = N(u_1) \setminus \{u_0\}; \quad S_2 = N(u_2) \setminus \{u_0\}.$$

可见, S_1 在 G 中的导出子图为完全图, (否则, S_1 中存在两点 v_i 与 v_j 不邻接, 从而 $\{v_i, v_j, u_2\}$ 为 G 的独立集, 这与 $\beta_0(G)=2$ 矛盾). 同理 S_2 在 G 中的导出子图也是完全图.

又因为 u_0 与 u_1 和 u_2 均邻接, 而 $|S_1| = |S_2| = 2t-1$, 故 S_1 和 S_2 中均存在与 u_0 不邻的点. 如果 S_1 和 S_2 分别恰有一点与 u_0 不邻, 则 u_0 点的度数 $d(u_0) = (2t-2) + (2t-2) + 2 = 4t-2 > 2t$ ($t\geq 2$), 矛盾. 故不妨设: S_1 中 v_1 与 u_0 不邻, S_2 中 v'_1 和 v'_2 均与 u_0 不邻. 由于 v_1 与 S_1 中各点邻接, 且与 u_1 邻接, 故 v_1 不能同与 v'_1 和 v'_2 相邻, 不妨设 v_1 与 v'_1 不邻, 从而 $S^* = \{v_1, v'_1, u_0\}$ 为 G 的独立集. 这与 $\beta_0(G)=2$ 矛盾. 定理 4 证毕.

定理 5 的证明:

如果图 G 没有两个不同的最大独立集, 则称图 G 具有唯一的最大独立集.

充分性: 由于 $n\geq 7$, 可以如下构造 n 阶非空正则图 G , 使得图 G 最大独立集是唯一的.

(1) 当 $n\equiv 0 \pmod{2}$ 时, ($n>7$)

$$\text{取 } G \cong \overline{K}_{\frac{n}{2}-1} + C_{\frac{n}{2}+1};$$

(2) 当 $n\equiv 3 \pmod{4}$ 时; ($n\geq 7$)

$$\text{取 } G \cong \overline{K}_{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n+1}{4} \cdot K_2\right);$$

(3) 当 $n\equiv 1 \pmod{4}$ 时; ($n>7$)

令: $n=4t+1$ ($t\geq 2$); 记 $V(K_{1,2t}) = \{u_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2t}\}$; $V(t \cdot K_2) = \{y_1, y_2, \dots, y_{2t}\}$; 其中 u_0 点为星 $K_{1,2t}$ 的中心点.

在图 $K_{1,2t} \cup (t \cdot K_2)$ 中, 对一切 $1\leq i\neq j\leq 2t$; 将 x_i 与 y_i 邻接, 这样得到一个 n 阶 $2t$ 度

正则图 G .

不难验证: 上述对 $n \geq 7$ 的不同情况, 我们构造的 n 阶非空正则图 G 具有唯一的最大独立集.

必要性: 只要验证, $1 \leq n \leq 6$ 时, 不存在 n 阶非空正则图 G , 使图 G 具有唯一的最大独立集.

当 $1 \leq n \leq 5$ 时, n 阶非空正则图只有下列 7 个图: K_2 , K_3 , $2K_2$, C_4 , K_4 , C_5 和 K_5 . 显然它们均不具有唯一的最大独立集.

当 $n=6$ 时, 6 阶非空正则图只有下列 7 个图, 按其正则度分类: (1) $3K_2$; (2) C_6 和 $2C_3$; (3) $K_{3,3}$ 和 $\overline{C_6}$; (4) $3 \cdot \overline{K_2}$; (5) K_6 . 显然它们均不具有唯一的最大独立集. 定理 5 证毕.

3 定理的几点说明

对于 n 阶 k -正则图的独立数 (点独立数). 定理 1 给出了其上界和下界; 定理 2 表明了上界是可达的; 定理 3 和 4 说明了下界是否可达还取决于 n 和 k 的关系. 当然, 定理 3 中 m 为偶数仅仅是下界可达的一个充分条件, 并非必要条件. 定理 5 肯定了具有唯一最大独立集的 n 阶 ($n \geq 7$) 非空正则图的存在性. 其证明过程中给出了这些图例. 一个自然的问题是: 当且仅当 n 和 k 满足什么条件时, 才存在 n 阶 k -正则图 G , 使 G 具有唯一的最大独立集? 这还有待于进一步探讨.

参 考 文 献

- [1] F. 哈拉里. 图论. 上海: 上海科学技术出版社, 1980
- [2] 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论. 北京: 科学出版社, 1987, 78~80
- [3] 田丰, 马仲蕃. 图与网络流理论. 北京: 科学出版社, 1987, 63~64
- [4] 李修睦. 图论导引. 武汉: 华中工学院出版社, 1982
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory With Applications, 1976

A Note on Independent Numbers of Regular Graphs

Xu Baogen

ABSTRACT

Let G be a k -regular graph with n vertices. This paper gives the bounds of independent number of G , and discusses mainly whether the bounds can arrive.

Key words: Regular graph; Independent number; Independent set.