拟范数性质(二)

龚代华

朱静萍

(基础课部)

(江西财经学院)

摘要

讨论了赋次范空间中线性算子的 Banach 逆算子定理, 闭图象定理, 共鸣定理及推论.

关键词: 次范数簇; 算子簇; 一致控制参数

定理 1 设有界线性算子 T 将次 Banach 空间 $E_1(M_1)$ 一一地映射到次 Banach 空间 $E_2(M_2)$ 上, $R(T)=E_2$, 则 T^{-1} 存在且 $T^{-1} \in B(E_2, E_1)$.

证 T^{-1} 存在且为 $E_2 \rightarrow E_1$ 的线性算子, 关键在于证明 T^{-1} 的有界性.

令 $O_n = \{x: \|x\|_1 \leq n, x \in E_1\}$ ($n=1, 2, \dots$), $M_n = T(O_n)$, 则 $E_2 = R(T) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n$, 可以证明 $\{M_n\}$ 中至少有一个在 E_2 中的某个闭球中稠密^[1]. 设 M_{n_0} 在 E_2 中的闭球

$Q(y_0, r_0) = \{y: y \in E_2, \|y - y_0\|_2 \leq r_0, r_0 > 0\}$ 中稠密.

令 $\delta_0 = \frac{r_0}{M_1 M_2 n_0}$, 则 $M_1 = T(O_1)$ 在 E_2 中的闭球 $Q_{\delta_0} = \{y: y \in E_2, \|y\|_2 \leq \delta_0\}$ 中稠密, 事实上, 任取 $y \in Q_{\delta_0}$, 则 $y_0 + M_1 n_0 y, y_0 - M_1 n_0 y$ 都属于 $Q(y_0, r_0)$, 因为 $\|y_0 \pm M_1 n_0 y - y_0\|_2 = \|M_1 n_0 y\|_2 \leq M_2 M_1 n_0 \|y\|_2 \leq r_0$. 于是存在 O_{n_0} 中的点列 $\{x_k\}$ 与 $\{x'_k\}$ ($k=1, 2, \dots$) 满足

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} T x_k &= y_0 + M_1 n_0 y, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} T x'_k &= y_0 - M_1 n_0 y. \end{aligned}$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} T \left(\frac{x_k - x'_k}{2M_1 n_0} \right) = y.$$

而 $\left\| \frac{x_k - x'_k}{2M_1 n_0} \right\|_1 \leq M_1 \frac{1}{2M_1 n_0} (\|x_k\|_1 + \|x'_k\|_1) \leq 1$,

于是 $\frac{x_k - x'_k}{2n_0 M_1} \in O_1$.

即 $M_1 = T(O_1)$ 在 Q_{δ_0} 中稠密.

本文于 1994 年 3 月 30 日收到

用 $O_{\frac{1}{2^n}}$ 表示 E_1 中的闭球 $\{x: \|x\|_1 \leq \frac{1}{2^n}\}$, 用 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$ 表示 E_2 中的闭球 $\{y: \|y\|_2 \leq \frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}\}$ ($n=1, 2, \dots$), 则对每个 n , $T(O_{\frac{1}{2^n}})$ 在 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$ 中稠密.

$\forall y \in Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$, 因 $2^n M_1 y \in Q_{\delta_0}$, 故存在 $\{x_k\} \subset O_1$ 满足: $\lim_{k \rightarrow +\infty} T x_k = 2^n M_1 y$.

即
$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{T x_k}{2^n M_1} = y.$$

而
$$\left\| \frac{x_k}{2^n M_1} \right\|_1 \leq M_1 \frac{\|x_k\|_1}{2^n M_1} \leq \frac{1}{2^n},$$

于是
$$\frac{x_k}{2^n M_1} \in O_{\frac{1}{2^n}}.$$

故 $T(O_{\frac{1}{2^n}})$ 在 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$ 中稠密.

下面说明 $T(O_1) \supset Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$.

任取 $y \in Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$, 由于 $\overline{T(O_{\frac{1}{2}})} \supset Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}$, 故 $\exists x_1 \in O_1$ 使

$$\|y - T x_1\|_2 \leq \frac{\delta_0}{2^{2n} M_1 M_2},$$

即
$$y - T x_1 \in Q_{\frac{\delta_0}{2^{2n} M_1 M_2}}.$$

又
$$Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}} \subset \overline{T(O_{\frac{1}{2}})},$$

故 $\exists x_2 \in O_{\frac{1}{2}}$ 使

$$\|y - T x_1 - T x_2\|_2 \leq \frac{\delta_0}{2^{3n} M_1 M_2}.$$

由归纳法可证: 存在点列 $\{x_n\} \subset E_1$ 满足

(1) $x_n \in O_{\frac{1}{2^n}}$;

(2) $\|y - (T x_1 + T x_2 + \dots + T x_n)\|_2 \leq \frac{\delta_0}{2^{n+1} M_1 M_2}.$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, 而 E_1 为次 Banach 空间, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 E_1 中收敛. 令 $x =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

则

$$\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq 1,$$

即 $x \in O_1$. 因 T 是连续的, 在 (1) 中令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$y = T x.$$

故 $y \in T(O_1)$, 于是 $Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}} \subset T(O_1)$ 即

$$T^{-1}(Q_{\frac{\delta_0}{2^n M_1 M_2}}) \subset O_1.$$

$\forall y \in E_2, y \neq 0$, 则

$$\frac{\delta_0}{2M_1M_2^2 \|y\|_2} y \in Q_{\frac{\delta_0}{2M_1M_2}},$$

因而

$$T^{-1}\left(\frac{\delta_0}{2M_1M_2^2 \|y\|_2} y\right) \in O_1.$$

于是

$$\left\| T^{-1}\left(\frac{\delta_0}{2M_1M_2^2 \|y\|_2} y\right) \right\|_1 \leq 1.$$

而

$$\left\| T^{-1} \frac{\delta_0 y}{2M_1M_2^2 \|y\|_2} \right\|_1 \geq \frac{1}{M_1} \frac{\delta_0 \|T^{-1}y\|_1}{2M_1M_2^2 \|y\|_2},$$

故

$$\|T^{-1}y\|_1 \leq \frac{2M_1^2M_2^2}{\delta_0} \|y\|_2.$$

推论 1 设线性空间 E 上的两个次范数 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 均使 E 成为次 Banach 空间且满足

$$\|x\|_2 \leq A \|x\|_1, \forall x \in E.$$

其中 $A > 0$ 为常数, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

定义 1 设有 $E_1(M_1), E_2(M_2)$, 定义 $E_1 \oplus E_2$ 上的次范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2, \forall (x, y) \in E_1 \oplus E_2.$$

则最小控制参数为 $M = \max\{M_1, M_2\}$.

定理 2 设 $E_1(M_1), E_2(M_2)$ 为赋次范线性空间, T 是定义在 E_1 的子空间 D 上而值域包含在 E_2 中线性算子, 则 T 为闭算子的充要条件是

$$\forall \{x_n\} \subset D, \text{若 } x_n \rightarrow x, Tx_n \rightarrow y \text{ 则 } Tx = y \text{ 且 } x \in D.$$

证 T 为闭算子, 则 $G(T) = \{(x, Tx) | x \in D\}$ 是 $E_1 \oplus E_2$ 中的闭集, $(x_n, Tx_n) \in G(T)$,

$$\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_1 + \|Tx_n - y\|_2, \text{故 } (x, y) \in G(T), y = Tx.$$

充分性参见文献 [2].

定理 3 设 $E_1(M_1), E_2(M_2)$ 为次 Banach 空间, $T: E_1 \rightarrow E_2$ 为线性算子, $D(T) = E_1$, 若 T 为闭算子, 则 $T \in B(E_1, E_2)$.

证 $E_1 \oplus E_2(M)$ 为次 Banach 空间, 这里 $M = \max\{M_1, M_2\}$, 定义 $\tilde{T}: G(T) \rightarrow E_1, \tilde{T}(x, Tx) = x, G(\tilde{T})$ 是 $E_1 \oplus E_2(M)$ 的闭子空间, 于是 $G(T)$ 也为次 Banach 空间. 因 $\|\tilde{T}(x, Tx)\|_1 = \|x\|_1 \leq \|x\|_1 + \|Tx\|_2 = \|(x, Tx)\|$, 故 $\tilde{T} \in B(E_1 \oplus E_2, E_1)$ 且 $D(\tilde{T}) = G(T), R(\tilde{T}) = E_1$, 由定理 1, $\tilde{T}^{-1}$ 存在且连续, 于是

$$\|\tilde{T}^{-1}(x)\| = \|(x, Tx)\| \leq \|\tilde{T}^{-1}\| \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 + \|Tx\|_2 \leq \|\tilde{T}^{-1}\| \|x\|_1,$$

即

$$T \in B(E_1, E_2).$$

定理 4 设 $E(M)$ 为次 Banach 空间, $E_1(M_1)$ 为赋次范空间, $\{T_\alpha\} (\alpha \in A) \in B(E, E_1)$, 且对每个 $x \in E$ 有

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_1 < +\infty,$$

则

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_1 < +\infty.$$

证 令 $p(x) = \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \}$, 则 $p(x)$ 是定义在 E 上的泛函且满足

$$(1) p(x) \geq 0,$$

$$(2) \frac{1}{M_1} |B| p(x) \leq P(Bx) \leq M_1 |B| p(x), \forall B \in K, x \in E. p(-x) = p(x).$$

$$(3) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$$

(1) 显然. $\forall B \in K, x \in E, \alpha \in A$ 有

$$\frac{1}{M_1} |B| \|T_\alpha x\|_1 \leq \|T_\alpha(Bx)\|_1 \leq M_1 |B| \|T_\alpha x\|_1,$$

故

$$\frac{|B|}{M_1} \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \} \leq \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha(Bx)\|_1 \} \leq M_1 |B| \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \}.$$

即

$$\frac{|B|}{M_1} p(x) \leq p(Bx) \leq M_1 |B| p(x).$$

$$p(-x) = \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha(-x)\|_1 \} = \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \} = p(x),$$

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha(x+y)\|_1 \} \leq \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \} + \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha y\|_1 \}. \\ &\leq \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha x\|_1 \} + \sup_{\alpha \in A} \{ \|T_\alpha y\|_1 \} = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

(4) 对任何数 $k > 0$, 集合 $M_k = \{x: p(x) \leq k\}$ 是 E 的闭集.

由 $p(x)$ 之定义易证 $M_k = \bigcap_{\alpha \in A} \{x: \|T_\alpha x\|_1 \leq k\}$, 而 $\{x: \|T_\alpha x\|_1 \leq k\}$ 是闭集 (因 $T_\alpha \in B(E, E_1)$), 因而 M_k 亦闭.

$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, 于是 $\{M_k\}$ 中必有某个元素 M_{k_0} 在 E 中某闭球 $Q(x_0, r_0) = \{x: \|x - x_0\| \leq r_0\}$ 中稠密, 因 M_k 为闭集, 故 $Q(x_0, r_0) \subset M_{k_0}$.

任取 $x \in E, x \neq 0$, 则 $x_0 + \frac{r_0 x}{M \|x\|}$ 与 $x_0 - \frac{r_0 x}{M \|x\|}$ 都属于 $Q(x_0, r_0) \subset M_{k_0}$, 故 $P(x_0 + \frac{r_0 x}{M \|x\|}) \leq k_0, P(x_0 - \frac{r_0 x}{M \|x\|}) \leq k_0$. 又 $P(x_0 - \frac{r_0 x}{M \|x\|}) = P(\frac{r_0 x}{M \|x\|} - x_0)$,

$$\begin{aligned} \text{由(3)有} \quad P\left(\frac{2r_0 x}{M \|x\|}\right) &= P\left(\frac{r_0 x}{M \|x\|} + x_0 + \frac{r_0 x}{M \|x\|} - x_0\right) \\ &\leq P\left(\frac{r_0 x}{M \|x\|} + x_0\right) + P\left(\frac{r_0 x}{M \|x\|} - x_0\right) \leq 2k_0. \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad P\left(\frac{2r_0 x}{M \|x\|}\right) \geq \frac{1}{M_1} \frac{2r_0}{M \|x\|} p(x),$$

$$\text{即} \quad P(x) \leq \frac{MM_1 k_0}{r_0} \|x\|.$$

于是对一切 $\alpha \in A, x \in E$.

$$\|T_\alpha x\| \leq \frac{MM_1 k_0}{r_0} \|x\|,$$

$$\text{即} \quad \|T_\alpha\| \leq \frac{MM_1 k_0}{r_0}.$$

推论 2 设 E 是次 Banach 空间, E_1 是赋次范线性空间, $T, T_\alpha \in B(E, E_1) (n=1, 2, \dots)$ 若对 $\forall x$

$\in E, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$, 则 $\sup \|T_n\| < +\infty$.

定理 5 设 $\{\|\cdot\|_i\} (i \in I)$ 是定义在线性空间 E 上的一簇次范数, 其最小控制参数分别为 $\{M_i\} (i \in I)$. 又设对任意 $i, j \in I, x \neq 0 \in E$ 有 $\frac{\|x\|_i}{\|x\|_j} \leq M, M$ 称为次范数簇的一致控制参数, $E_0(M_0)$ 为次 Banach 空间, 设 $T_i \in B(E_0, E(M_i))$ 满足

$$\sup_{i \in I} \{ \|T_i x\|_i \} < +\infty, \quad \forall x \in E_0.$$

则 $\sup_{i \in I} \{ \|T_i\| \} < +\infty$.

证 $\forall i, j \in I, x \neq 0 \in E$ 由假设

$$\frac{\|x\|_i}{\|x\|_j} \leq M, \quad \text{特别 } i = j \text{ 时, } 1 = \frac{\|x\|_i}{\|x\|_j} \leq M.$$

又 $\frac{\|x\|_j}{\|x\|_i} \geq \frac{1}{M}$, 由于 $i, j \in I$ 是任意的, 因此, 对所有 $x \neq 0 \in E$ 有

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\|x\|_i}{\|x\|_j} \leq M.$$

又因为

$$M_i = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ \alpha \neq 0}} \frac{\|\alpha x\|_i}{|\alpha| \|x\|_i},$$

$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \neq 0, \alpha \neq 0$, 使

$$\|\alpha_0 x_0\|_i > (M_i - \epsilon) |\alpha_0| \|x_0\|_i,$$

于是

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{\|\alpha_0 x_0\|_i}{\|\alpha_0 x_0\|_j} \geq \frac{(M_i - \epsilon) |\alpha_0| \|x_0\|_i}{\frac{1}{M_j} |\alpha_0| \|x_0\|_j} \\ &= (M_i - \epsilon) M_j \frac{\|x_0\|_i}{\|x_0\|_j} \geq (M_i - \epsilon) M_j \frac{1}{M}. \end{aligned}$$

即 $M^2 \geq (M_i - \epsilon) M_j$.

令 $\epsilon \rightarrow 0$ 得 $M^2 \geq M_i M_j$,

于是 $M_i \leq M, \quad i \in I$.

令 $p(x) = \sup_{i \in I} \{ \|T_i x\|_i \}$, 则 $p(x)$ 为定义在 E_0 上的泛函且满足

(1) $p(x) \geq 0, p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E_0$.

(2) $\frac{1}{M} |\alpha| p(x) \leq P(\alpha x) \leq M |\alpha| p(x), \forall \alpha \in K, x \in E_0$.

$$P(-x) = P(x).$$

(3) $\forall k > 0, M_k = \{x: P(x) \leq k\}$ 为闭集.

(1) 显然.

$$\begin{aligned} (2) \quad P(\alpha x) &= \sup_{i \in I} \{ \|T_i \alpha x\|_i \} \\ &\leq \sup_{i \in I} \{ M_i |\alpha| \|T_i x\|_i \} \\ &\leq \sup_{i \in I} \{ M |\alpha| \|T_i x\|_i \} \\ &= M |\alpha| p(x). \end{aligned}$$

同理可证 $p(\alpha x) \geq \frac{1}{M} |\alpha| p(x)$.

由 $\|T_i(-x)\|_i = \|T_i x\|_i, \forall i \in I, x \in E_0$ 立即有 $P(-x) = P(x)$.

(3) $M_k = \bigcap_{i \in I} \{x: \|T_i x\|_i < k\}$, T_i 为有界算子, 故 M_k 为闭集.

由于 $E_0 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} M_k$, 同定理 4 可以证明, 存在某个 M_{k_0} 在 E_0 中的某个闭球 $Q(x_0, r_0) = \{x:$

$$\|x - x_0\| \leq r\} \text{ 中稠密, 于是 } P(x) \leq \frac{M_0 M_{k_0}}{r_0} \|x\|.$$

即 $\|T_*\| \leq \frac{M_0 M_{k_0}}{r_0}.$

推论 3 设 $\{\|\cdot\|_i\} (i \in I)$ 是定义在线性空间 E 上的一簇次范数其最小控制参数分别为 $\{M_i\} i \in I$, $E_0(M_0)$ 为一次 Banach 空间, I_{ij} 为从 $E(M_i)$ 到 $E(M_j)$ 的单位变换满足 $\|I_{ij}\| \leq M, \forall i, j \in I$, 若对 $\forall x \in E_0$ 有

$$\sup_{i \in I} \{ \|T_i x\|_i \} < +\infty,$$

则 $\sup_{i \in I} \{ \|T_i\| \} < +\infty.$

证 对 $\forall x \neq 0 \in E_0$,

$$\|T_{ij} x\|_j \leq \|I_{ij}\| \|x\|_i \leq M \|x\|_i,$$

即 $\|x\|_j \leq M \|x\|_i,$

$$\frac{\|x\|_j}{\|x\|_i} \leq M.$$

由定理 5 $\sup_{i \in I} \{ \|T_i\| \} < +\infty.$

定理 7 设 T 是定义在次 Banach 空间 E 的线性子空间 $D(T)$ 上, 而 $R(T)$ 在“第二纲”赋次范空间 E_1 中的线性算子, 满足

- (1) T 是闭算子;
- (2) $R(T)$ 是“第二纲”的.

则有 (1) $\forall \epsilon > 0$, 必有 E_1 中的一个原心球 $Q(\theta, \delta)$, 使 $Q(\theta, \delta) \subset T[O(\theta, \epsilon) \cap D(T)].$

(2) $R(T) = E_1.$

证 $R(T) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} T\{n[O(\theta, \frac{\epsilon}{2}) \cap D(T)]\},$

而 $R(T)$ 是第二纲的, 故存在 E_1 中的闭球 $Q(y_0, \delta_0)$ 及某一自然数 n_0 , 使

$$T\{n_0[O(\theta, \frac{\epsilon}{2}) \cap D(T)]\} \supset Q(y_0, \delta_0).$$

而 $Q(y_0, \delta_0) \supset n_0 Q(\frac{y_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{M_1 n_0})$, 这里 M_1 为 E_1 的最小控制参数.

事实上 $\forall y \in Q(\frac{y_0}{n_0}, \frac{\delta_0}{M_1 n_0})$,

$$\begin{aligned} \|n_0 y - y_0\|_1 &= \|n_0(y - \frac{y_0}{n_0})\|_1 \leq M_1 n_0 \|y - \frac{y_0}{n_0}\|_1 \\ &\leq M_1 n_0 \frac{\delta_0}{M_1 n_0} = \delta_0, \end{aligned}$$

故 $n_0 y \in Q(y_0, \delta_0)$. 于是可以证明

$$T[O(\theta, \epsilon) \cap D(T)] \supset Q(\theta, \frac{\delta_0}{2MM_1 n_0}).$$

这里 M 为 E 的最小控制参数.

$$\begin{aligned} E_1 &= \bigcup_{n=1}^{\infty} nQ\left(\theta, \frac{\delta_0}{2MM_1n_0}\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nT[O(\theta, \epsilon) \cap D(T)] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} T[n[O(\theta, \epsilon) \cap D(T)]] = R(T). \end{aligned}$$

因此 $R(T) = E_1$.

参 考 文 献

- [1] Sterling K. Berberian. Lectures in functional analysis and operator theory. Springer-Verlag. 1974, 200
- [2] Angus E. Taylor, David C. Lay. Introduction to functional analysis. John Wiley & Sons, 1980, 208
- [3] RD Milne. Applied Functional analysis. Pitman, 1980, 179.
- [4] 定光桂. 巴拿赫空间引论. 北京: 科学出版社, 1984. 333

Some Properties on Quasi Normed Space

Gong Daihua Zhu Jingping

ABSTRACT

In this paper we discuss Banach theorem about continuous inverses, open mapping theorem, closed graph theorem, and uniform boundedness principle.

Key words: Variety of subnorm; Variety of operator; Uniform dominated parameter